Homework 13: 15 December 2016
Traitement Quantique de l'Information

Exercise 1 *Réalisation physique de la porte SWAP*

La porte est importante car elle permet d'échanger les q-bits dans un circuit. Elle est définie dans la base computationelle par

$$\mathrm{SWAP}\,|x, y\rangle = |y, x\rangle$$

a) Démontrez que cette opération est unitaire et donnez sa matrice correspondante.

b) Nous allons montrer qu'elle peut être réalisée grâce à l'Hamiltonien de Heisenberg

$$H = \hbar J \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

Calculez l'opérateur d'évolution des deux spins

$$U = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right)$$

et montrez que l'on obtient SWAP pour $t_0 = \pi/4J$

Formules utiles :

- Pour une matrice par bloc (à démontrer)

$$\exp\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \exp(A) & 0 \\ \hline 0 & \exp(B) \end{array}\right)$$

- Formule d'Euler généralisée

$$\exp(i\alpha\sigma_k) = I\cos\alpha + i\sigma_k \sin\alpha$$

c) On peut aussi réaliser SWAP grâce à 3 portes "control not". Soit

$$\mathrm{CNOT}|x, y\rangle = |x, y \oplus x\rangle, \quad \widetilde{\mathrm{CNOT}}|x, y\rangle = |x \oplus y, y\rangle$$

Montrez que

$$\mathrm{SWAP} = (\mathrm{CNOT})(\widetilde{\mathrm{CNOT}})(\mathrm{CNOT})$$