Homework 11 : 1 December 2016
Traitement Quantique de l'Information

Exercise 1 *Rotations sur la sphère de Bloch*

a) Représentez sur la sphère de Bloch les vecteurs propres de σ_x, σ_y et σ_z.

b) Calculez explicitement les matrices $\exp\bigl(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x\bigr)$, $\exp\bigl(-i\frac{\beta}{2}\sigma_y\bigr)$, $\exp\bigl(-i\frac{\gamma}{2}\sigma_z\bigr)$.

c) Considérez le qubit $|\psi\rangle = (\cos\frac{\theta}{2})|\uparrow\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}}(\sin\frac{\theta}{2})|\downarrow\rangle$. Représentez l'action des matrices $\exp\bigl(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x\bigr)$ et $\exp\bigl(-i\frac{\gamma}{2}\sigma_z\bigr)$ sur ce vecteur.

Exercise 2 *Création d'intrication grâce à une interaction magnétique.*

On considère deux spins $\frac{1}{2}$ nucléaires avec Hamiltonien d'interaction $\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$. L'opérateur d'évolution de ce système est $U = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}\right)$. Soit

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$$

l'état initial des deux spins.

a) Montrez que l'état après un temps $t = \frac{\pi}{4J}$ est

$$|\psi_t\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - i\,|\uparrow\downarrow\rangle + i\,|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right)$$

b) Montrez que cet état est intriqué, c'est à dire qu'il est impossible de l'écrire sous la forme $(\alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle) \otimes (\gamma\,|\uparrow\rangle + \delta\,|\downarrow\rangle)$.

c) Maintenant on laisse voluer l'état obtenu ci-dessus, encore pendant un temps $\frac{\pi}{4J}$. Calculez l'état résultant et déterminez si il est intriqué ou non.

d) Et que ce passe t-il si on laisse évoluer l'état initial $|\Psi_0\rangle$ pendant un temps $\frac{\pi}{J}$?