Homework 10 : 24 November 2016
Traitement Quantique de l'Information

Exercise 1 *Propriétés des matrices de Pauli*

Dans cette série nous récoltons des importantes des matrices de Pauli qui sont couramment utilisées. Soit $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ le vecteur formé par les 3 matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice identité sera notée $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrez que toute matrice 2×2, A, peut s'écrire comme combinaison linéaire de I et σ_x, σ_y, σ_z :

$$A = a_0 I + a_1 \sigma_x + a_2 \sigma_y + a_3 \sigma_z.$$

On écrit aussi cela sous la forme $A = a_0 I + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ où $\vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ est le produit scalaire formel entre les vecteurs $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

Vérifiez aussi que si $A = A^\dagger$ on a a_0, a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$.

b) Vérifiez que les matrices de Pauli satisfont les identités algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} &\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I \\ &\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z \\ &\sigma_y \sigma_z = i\sigma_x \\ &\sigma_z \sigma_x = i\sigma_y \end{aligned}$$

Déduire les identités (souvent utiles dans les calculs)

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0 \\ \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y = 0 \\ \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z = 0 \end{aligned}$$

c) Soit $[A, B] = AB - BA$ le commutateur. Montrez (en utilisant les résultats précédents par exemple) que

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z \\ [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x \\ [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y \end{aligned}$$

Ces relations sont appelées "relations de commutation" (du spin).

d) On définit l'exponentielle d'une matrice A par (pour $t \in \mathbb{R}$)

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + ...$$

On veut démontrer l'identité utile suivante :

$$e^{it\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = I\cos t + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin t$$

où $\vec{n}$ est un vecteur unité et $t \in \mathbb{R}$. Remarquez que cette identité est une généralisation de l'identité d'Euler :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Pour démontrer l'identité, montrez d'abord que

$$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = I$$

Utilisez les développements de Taylor de $\cos t$ et $\sin t$ pour en déduire l'identité voulue.

e) Ecrivez explicitement les matrices 2×2 (sous forme de tableau) suivantes : $\exp(it\vec{n}\cdot\vec{\sigma})$ et $\exp(it\sigma_x)$; $\exp(it\sigma_y)$; $\exp(it\sigma_z)$.

f) Calculez les valeurs propres et vecteurs propres de σ_x, σ_y, σ_z (en composantes). Vérifiez que les valeurs propres satisfont les identités $\mathrm{Tr}\,\sigma_x = \mathrm{Tr}\,\sigma_y = \mathrm{Tr}\,\sigma_z = 0$ et $\det\sigma_x = \det\sigma_y = \det\sigma_z = -1$.

g) Notation de Dirac. On posera

$$|{\uparrow}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } |{\downarrow}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vérifiez que

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= |{\uparrow}\rangle\langle{\uparrow}| - |{\downarrow}\rangle\langle{\downarrow}| \\
\sigma_x &= |{\uparrow}\rangle\langle{\downarrow}| + |{\downarrow}\rangle\langle{\uparrow}| \\
\sigma_y &= i\,|{\downarrow}\rangle\langle{\uparrow}| - i\,|{\uparrow}\rangle\langle{\downarrow}|
\end{aligned}$$

h) Posez $|\psi\rangle = \alpha\,|{\uparrow}\rangle + \beta\,|{\downarrow}\rangle$ pour α, $\beta \in \mathbb{C}$ et résoudre le problème aux valeurs propres

$$\sigma_i\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle \text{ pour } i = x, y, z$$

en travaillant avec la notation de Dirac.