Examen final

Nom: .... Prénom: .... Section: ....

JUSTIFIEZ TOUTES VOS REPONSES !!

Notations: $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|\phi_1, \phi_2\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$, $|\phi_1, \phi_2, \phi_3\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes |\phi_3\rangle$ ect. La base computationnelle de l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^2$ est $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Problème 1 (20 points)

Soit $a \in \{0,1\}$. Pour a fixé, soit la fonction $f(x_1, x_2) = a\, x_1 x_2$ où $x_1, x_2 \in \{0,1\}$. Soit U_f la matrice unitaire qui représente cette fonction sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$ de trois bits quantiques. On rappelle que $U_f|x_1, x_2, z\rangle = |x_1, x_2, z \oplus f(x_1, x_2)\rangle$ où $z \in \{0,1\}$. Soit U la matrice unitaire

$$U = (H \otimes H \otimes \mathbf{1})\, U_f\, (H \otimes H \otimes H)$$

et $|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle$ un état "initial".

1) Dessinez le circuit correspondant à la matrice unitaire U initialisé avec $|\Psi\rangle$.

2) Montrez que l'état de sortie du circuit est de la forme

$$\left\{ \sum_{y_1, y_2 \in \{0,1\}^2} c_{y_1,y_2} |y_1, y_2\rangle \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

et donnez l'expression des coefficients c_{y_1,y_2} en fonction de a.

3) On mesure les deux premiers bits dans la base computationnelle. Donnez les probabilités de toutes les observations possibles en fonction de a. Calculez toutes ces probabilités sous forme de fractions simples pour $a = 0$ et $a = 1$.

4) Vérifiez en particulier que si $a = 0$ la probabilité d'observer $(0,0)$ est égale à 1. Peut-on en conclure qu'avec une seule expérience sur le circuit on peut déterminer si f est la fonction constante?

Problème 2 (15 points)

Soit $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ une fonction constante ou balancée (une fonction constante prend une seule valeur et ici une fonction balancée prend deux valeurs). On considère le circuit quantique associé au produit suivant

$$(H \otimes \mathbf{1})\, U_f\, (H \otimes H)(N \otimes \mathbf{1})\, \mathbf{1} \otimes X$$

ou $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $U_f |x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y \oplus f(x)\rangle$. Le circuit est initialisé avec l'état $|0\rangle \otimes |0\rangle$.

A la sortie du circuit le *premier* bit quantique est mesuré dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

1) Calculez la sortie du circuit juste avant la mesure pour $N = \mathbf{1}$. Expliquez comment on détermine si la fonction est constante ou balancée lors de la mesure.

2) Calculez maintenant la sortie du circuit juste avant la mesure pour $N = \mathbf{1}$ (pas de discussion de la mesure ici).

3) On suppose maintenant que N est une matrice *aléatoire* égale à X avec probabilité ϵ et égale à $\mathbf{1}$ avec probabilité $1 - \epsilon$. Ceci est un modèle de bruit dans le circuit.

Pour déterminer si f est balancée ou constante on applique l'algorithme de Deutsch-Josza qui correspond au cas **1)** ci-dessus.

Déterminez la probabilité d'erreur associée à cet algorithme lorsque f est constante. Déterminez aussi la probabilité d'erreur associée à cet algorithme lorsque f est balancée.

please turn the page %

Problème 3 (15 points)

Soit $M = 2^m$ où $m \geq 1$ est un entier. Soit $x, y \in \{0, \cdots, M-1\}$ des entiers. On rappelle que la transformée de Fourier quantique est définie par

$$\mathrm{QFT}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{y=0}^{M-1} e^{\frac{2\pi i x y}{M}} |y\rangle$$

Les états $|x\rangle$ et $|y\rangle$ peuvent être réalisés avec des bits quantiques en utilisant la représentation binaire des entiers, i.e., $|x\rangle = |x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}\rangle$ et $|y\rangle = |y_0, y_1, \cdots, y_{m-1}\rangle$ où $x = \sum_{i=0}^{m-1} x_i 2^i$, $y = \sum_{i=0}^{m-1} y_i 2^i$, $x_i, y_i \in \{0, 1\}$.

1) Montrez que la matrice QFT est unitaire.

2) On prend maintenant $M = 4$ et $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |3\rangle)$. Calculez explicitement $\mathrm{QFT}|\psi\rangle$. Calculez la probabilité qu'une mesure dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ donne l'état $|2\rangle$.

3) Est-ce que les états $|\psi\rangle$ et/ou $\mathrm{QFT}|\psi\rangle$ sont intriqués quand on les réalise grâce à des bits quantiques? Vous justifierez vos réponses avec une démonstration à l'appui.

please turn the page %

Problème 4 (20 points)

On se donne une liste de N éléments symboliquement appelés $e_1, e_2, \cdots, e_N$ qui contient un et un seul élement "marqué" noté $e_* \in \{e_1, e_2, \cdots, e_N\}$. On décide de faire une recherche de l'élément marqué grâce à l'algorithme de Grover. Pour cela on construit un espace de Hilbert $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^2$ où $\mathcal{H}$ est défini par sa base orthonormale $\{|e_1\rangle, \cdots, |e_N\rangle\}$.

Soit F la fonction

$$F(e) = \begin{cases} 1, & \text{si } e = e_*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et G l'opérateur Grover

$$G = (R \otimes \mathbf{1})\, U_F$$

Ici $U_F|e\rangle \otimes |0\rangle = |e\rangle \otimes |F(e)\rangle$ et $U_F|e\rangle \otimes |1\rangle = |e\rangle \otimes |1 \oplus F(e)\rangle$. La matrice R est la matrice (othogonale) de réflexion par rapport au vecteur

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} |e\rangle$$

1) Dessinez le circuit quantique associé à la matrice unitaire (ici $I_{N\times N}$ la matrice identité $N \times N$)

$$U = G^k\,(I_{N\times N} \otimes H)$$

(ici G^k signifie "G à la puissance k")

2) Calculez la sortie de ce circuit quand il est initialisé avec l'état $|\Psi_0\rangle \otimes |1\rangle$.

3) On fait une mesure avec un appareil modélisé par un ensemble de projecteurs

$$|e_1\rangle\langle e_1| \otimes \mathbf{1}, \cdots, |e_N\rangle\langle e_N| \otimes \mathbf{1}$$

Donnez tous les états possibles du système juste après la mesure ainsi que leur probabilités associées.

4) Comment choisir k en fonction de N pour obtenir une probabilité de succès égale à $1/2$ dans la limite où $N \to +\infty$, où le succès signifie que la mesure donne l'état marqué $|e_*\rangle$. Donnez le préfacteur exact dans votre asymptotique pour k en fonction de N. *Indication*: $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

please turn the page %