

Exercice 1 *Propriétés des matrices de Pauli*

Dans cette série nous récoltons des importantes des matrices de Pauli qui sont couramment utilisées. Soit $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ le vecteur formé par les 3 matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice identité sera notée $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que toute matrice 2×2 , A , peut s'écrire comme combinaison linéaire de I et $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$:

$$A = a_0 I + a_1 \sigma_x + a_2 \sigma_y + a_3 \sigma_z.$$

On écrit aussi cela sous la forme $A = a_0 I + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ où $\vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ est le produit scalaire formel entre les vecteurs $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

Vérifiez aussi que si $A = A^\dagger$ on a $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

2. Vérifiez que les matrices de Pauli satisfont les identités algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I \\ \sigma_x \sigma_y &= i \sigma_z \\ \sigma_y \sigma_z &= i \sigma_x \\ \sigma_z \sigma_x &= i \sigma_y \end{aligned}$$

Déduire les identités (souvent utiles dans les calculs)

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x &= 0 \\ \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z &= 0 \end{aligned}$$

3. Soit $[A, B] = AB - BA$ le commutateur. Montrez (en utilisant les résultats précédents par exemple) que

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y] &= 2i \sigma_z \\ [\sigma_y, \sigma_z] &= 2i \sigma_x \\ [\sigma_z, \sigma_x] &= 2i \sigma_y \end{aligned}$$

Ces relations sont appelées "relations de commutation" (du spin).

4. On définit l'exponentielle d'une matrice A par (pour $t \in \mathbb{R}$)

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \dots$$

On veut démontrer l'identité utile suivante :

$$e^{it\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = I \cos t + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \sin t$$

où \vec{n} est un vecteur unité et $t \in \mathbb{R}$. Remarquez que cette identité est une généralisation de l'identité d'Euler :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Pour démontrer l'identité, montrez d'abord que

$$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = I$$

Utilisez les développements de Taylor de $\cos t$ et $\sin t$ pour en déduire l'identité voulue.

5. Ecrivez explicitement les matrices 2×2 (sous forme de tableau) suivantes : $\exp(it\vec{n}\cdot\vec{\sigma})$ et $\exp(it\sigma_x)$; $\exp(it\sigma_y)$; $\exp(it\sigma_z)$.
6. Calculez les valeurs propres et vecteurs propres de $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (en composantes). Vérifiez que les valeurs propres satisfont les identités $\text{Tr } \sigma_x = \text{Tr } \sigma_y = \text{Tr } \sigma_z = 0$ et $\det \sigma_x = \det \sigma_y = \det \sigma_z = -1$.
7. Notation de Dirac. On posera

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vérifiez que

$$\begin{aligned} \sigma_z &= |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \\ \sigma_x &= |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \\ \sigma_y &= i|\downarrow\rangle\langle\uparrow| - i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| \end{aligned}$$

8. Posez $|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et résoudre le problème aux valeurs propres

$$\sigma_i |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle \text{ pour } i = x, y, z$$

en travaillant avec la notation de Dirac.