Série d'entrainement : 5 Novembre 2015
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Petit entraînement en notaion de Dirac*

On adopte la notation $|b\rangle$, $|c\rangle$ pour les états de la base canonique $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ (c.à.d. que $b = 0, 1$ et $c = 0, 1$). Vérifiez que, si on identifie $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors la matrice de Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ s'écrit en notation de Dirac,

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \big).$$

Vérifiez ensuite que pour $b = 0, 1$ (faites ceci en notation de Dirac)

$$H |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|0\rangle + (-1)^b |1\rangle \Big)$$

Vérifiez aussi que (faites le en notation de Dirac)

$$H \otimes H |b_1\rangle \otimes |b_2\rangle = \frac{1}{2} \sum_{(c_1,c_2) \in \{0,1\}^2} (-1)^{b_1 c_1 + b_2 c_2} |c_1\rangle \otimes |c_2\rangle$$

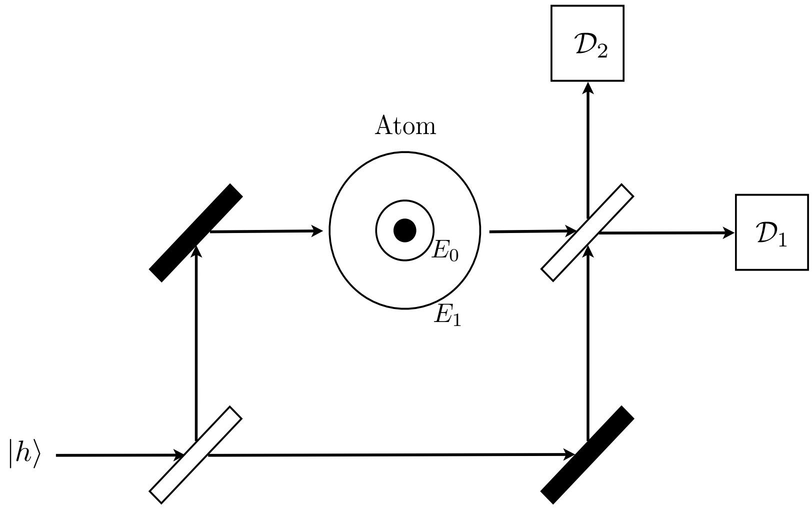
Indication : Nous rappelons que $H \otimes H|b_1\rangle \otimes |b_2\rangle = H|b_1\rangle \otimes H|b_2\rangle$.

Exercice 2 *Variation sur l'interféromètre de Mach-Zehnder*

On considère un interféromètre avec deux miroirs semitransparents et deux miroirs réfléchissants, comme dans la série 2 (ici il n'y a pas de déphaseurs). De plus un atome est placé sur un des chemins possibles de l'interféromètre, comme sur la figure ci-desous. Cette fois on veut tenir compte du fait que le photon pourrait être absorbé par l'atome.

L'espace de Hilbert du photon est maintenant modélisé par un espace *à trois dimensions* dont les états de base orthonormés sont

$$|h\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |v\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\text{abs}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Les mirroirs semi-transparents agissent comme $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les mirroirs réfléchissants sont modélisés par la matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le processus d'absorption du photon par l'atome agit comme $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculez $M|h\rangle, M|v\rangle, M|\text{abs}\rangle$ pour $M = S, R, P$. Faites le calcul comme vous voulez mais, <u>donnez les résultats en notation de Dirac</u>.

(b) L'état initial du photon est $|h\rangle$. Calculez l'état du photon à la sortie du second miroir semi-transparent. Puis calculez les probabilités que le photon soit détecté dans D_1, dans D_2, et aussi pas du tout détecté (c.a.d absorbé par l'atome).

(c) On pourrait considérer d'autres modèles pour l'interaction entre le photon et l'atome, auquel cas il faudrait remplacer la matrice P. Laquelle de ces deux matrices serait légitime, c.a.d compatibles avec les principes de la mécanique quantique : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$? Justifiez ! (pas de longs calculs).

Exercice 3 *Représentations sur la sphère de Bloch.*

On rappelle qu'un bit quantique

$$\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle$$

est représenté par le vecteur pointant dans la direction (θ, ϕ) en coordonnées sphériques sur une sphère (appelée dans ce contexte sphère de Bloch). On rappelle que Z est une des matrices de pauli : $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculez et représentez sur la sphère de Bloch les qubits suivants (dessinez une sphère avec les axes x, y, z pour chaque question **(a)-(c)**)

(a) $|\uparrow\rangle$ et $e^{i\lambda Z}|\uparrow\rangle$, où λ est un nombre réel quelconque.

(b) $\frac{|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$ et $e^{i\frac{\phi}{2}Z}(\frac{|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}})$.

(c) Supposons que la variable t représente le temps et ω un nombre réel positif (une fréquence). Représentez la trajectoire du vecteur $e^{it\frac{\omega}{2}Z}(\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle)$ sur la sphère de Bloch. Cette trajectoire est-elle périodique ? Si oui, quelle est sa période ?

Exercice 4 *Billets de banque quantiques.*

En 1970 S. Wiesner[1] eut l'idée des billets de banque quantiques (ou plutôt chèques quantiques). Il s'agit dans cet exercice de discuter cette idée (essentiellement sans faire de calculs).

La banque génère deux suites de bits classiques indépendants et uniformément aléatoires $e_1, \cdots, e_N$, $e_i = 0, 1$ et $x_1, \cdots, x_N$, $x_i = 0, 1$. Les deux séquences sont gardées secrètes par la banque. N ($N = 100$ par exemple) photons sont piégés dans N cavités insérées dans un "billet". Si $e_i = 0$ le photon i est préparé dans un état de polarisation $|x_i\rangle \in \{|0\rangle, |1\rangle\}$. Si $e_i = 1$ le photon i est préparé dans un état de polarisation $H|x_i\rangle \in \{|+\rangle, |-\rangle\}$. On rappelle ici que H est la matrice de Hadamard et $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

La banque édite sur le billet un numéro de série S. Le numero S est public, mais seule la banque connait la correspondance $e_1, \cdots, e_N \leftrightarrow S$.

(a) Une personne présente le billet à la banque. Comment la banque vérifie t-elle que le billet n'est pas un faux ? En particulier comment le fait-elle sans détruire ce billet. Donnez une discussion essentiellement qualitative sans faire de calculs.

(b) Un malfaiteur peut-il copier le billet de banque avec une seule "machine unitaire" ? Justifiez.

Exercice 5 *Inégalités de Bell pour des états produits (non-intriqués)*

Soit les observables (polarisation)

$$A = (+1)|\alpha\rangle\langle\alpha| + (-1)|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|, \qquad A' = (+1)|\alpha'\rangle\langle\alpha'| + (-1)|\alpha'_\perp\rangle\langle\alpha'_\perp|$$

et

$$B = (+1)|\beta\rangle\langle\beta| + (-1)|\beta_\perp\rangle\langle\beta_\perp|, \qquad B' = (+1)|\beta'\rangle\langle\beta'| + (-1)|\beta'_\perp\rangle\langle\beta'_\perp|$$

(a) Calculez $\langle\psi|A \otimes B|\psi\rangle$ pour l'état produit $|\psi\rangle = |\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle$ ou $|\gamma$ et $|\delta\rangle$ sont des états de polarisation linéaire (par exemple $|\gamma\rangle = \cos\gamma|0\rangle + \sin\gamma|1\rangle$). On pourra utiliser $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ pour mettre le résultat sous forme agréable.

1. Pour en savoir plus sur les liens entre cette idée et le protocole BB84, ainsi que sur les liens entre les prtagonistes eux mêmes et le processus historique de ces découvertes consultez l'article historique de Gilles Brassard sur la page web du cours.

(b) Considérez le coefficient de corrélation

$$X = \langle\psi|A \otimes B + A \otimes B' - A' \otimes B + A' \otimes B'|\psi\rangle$$

et montrez dans cas ci-dessus de l'état produit que $|X| \leq 2$ quelque soit γ, δ et $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$.

Exercice 6 *Exercice facultatif. Sera rediscuté à la fin du cours dans le cadre de la "décohérence". Effet de l'environnement dans l'expérience des franges de Young.*

Le but de cet exercice est de discuter une expérience de pensée qui est une variation de l'expérience des doubles fentes de Young. Ce genre d'expérience de pensée devient aujpurd'hui une réalité de laboratoire, grâce aux expériences d'interférométrie (par exemple doubles fentes) réalisées avec de grosses molécules (voir article "old and new" sur la page web du cours).

On imagine une source de particules uniques (par exemple molécules de C60) qui passent à travers les deux fentes de Young. L'état de la particule entre les fentes et l'écran est donné par une fonction d'onde $\psi(\vec{r}) = \psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r})$ ou $\psi_{1,2}$ sont les fonctions d'onde spheriques de la série 1. En fait leur expression exacte nous importe peu ici. Nous allons décrire l'état de la particule de facon plus abstraite par des kets (en notation de Dirac)

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$$

L'amplitude de la particule au point $\vec{r}$ est donnée par $\langle\vec{r}|\psi\rangle = \langle\vec{r}|\psi_1\rangle + \langle\vec{r}|\psi_2\rangle$. La probabilité de d'observer la particule au point $\vec{r}$ (ce point peut être sur l'écran par exemple) est

$$\begin{aligned}|\langle\vec{r}|\psi\rangle|^2 &= |\langle\vec{r}|\psi_1\rangle + \langle\vec{r}|\psi_2\rangle|^2 \\ &= |\langle\vec{r}|\psi_1\rangle|^2 + |\langle\vec{r}|\psi_2\rangle|^2 + \overline{\langle\vec{r}|\psi_1\rangle}\langle\vec{r}|\psi_2\rangle + \langle\vec{r}|\psi_1\rangle\overline{\langle\vec{r}|\psi_2\rangle}\end{aligned}$$

Le calcul de cette probabilité a été effectué dans la série 1 et donne les franges d'interférences. Ici nous considérons la variation suivante de l'expérience. On veut modéliser une situation ou la particule n'est pas isolée de l'environnement. On peut imaginer par exemple que la molécule de C60 possède des degrés de libertés internes qui sont excités : elle peut ainsi émettre spontanément un photon. Il est naturel de supposer que l'état du photon (par exemple la direction de la quantité de mouvement) dépend de l'état de la molécule : on admet que si la molécule est dans l'état $|\psi_1\rangle$ le photon est émis dans un état $|1\rangle$, et si la molécule est dans l'état $|\psi_2\rangle$ le photon est émis dans un état $|2\rangle$. Nous supposons aussi que les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ du photon sont orthogonaux i.e $\langle 1|2\rangle = 0$. Ainsi l'état du système C60 plus photon est

$$|\psi_1\rangle \otimes |1\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |2\rangle$$

Cet état est intriqué : on ne peut dissocier l'état de la molécule de celui du photon. On dit que la molécule est intriquée avec son environnement.

On considère maintenant les mesures suivantes.

1. On observe le point de collision de la molécule sur l'écran et le photon dans un photodétecteur. Quelle est la probabilité d'observer la molécule dan l'état $|\vec{r}\rangle$ (position $\vec{r}$) et le photon dan l'état $|1\rangle$ (direction 1 pour sa quantité de mouvement).

2. Même question si le photon est observé dans l'état $|2\rangle$.

3. On fait plusieurs expériences : c'est à dire que plusieurs molécules sont envoyées une par une à travers la double fente. Décrire l'intensité observée sur lécran. Comparer au cas ou la molécule est isolée de son environnement et le photon est absent.

On considère maintenant une situation ou le photon émis n'est pas intriqué avec létat de la particule. En d'autre termes l'état du photon est indépendant de $|\psi_{1,2}\rangle$. Soit $|0\rangle$ cet état. L'état du système C60 plus photon est alors un état produit :

$$|\psi_1\rangle \otimes |0\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |0\rangle = (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \otimes |0\rangle$$

4. Quelle est la probabilité d'observer la particule dans l'état $|\vec{r}\rangle$ et le photon dans létat $|0\rangle$? Observe-t-on des franges d'interférences ?