

Exercice 1 *Etats de Bell.*

Le but de cet exercice est de se familiariser avec certains calculs relatifs aux états de Bell : les calculs des trois premières questions sont à faire en notation de Dirac.

1. Montrez que 4 les états de Bell introduits en cours forment une base orthonormée de $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$.
2. Montrez que l'état $|B_{00}\rangle$ (ou bien prenez en un autre) est intriqué. C'est à dire qu'il n'existe pas $|\psi_1\rangle \in \mathbf{C}^2$ et $|\psi_2\rangle \in \mathbf{C}^2$ tels que $|B_{00}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \in \mathbf{C}^2$.
3. Soit $|\gamma\rangle = \cos \gamma |0\rangle + \sin \gamma |1\rangle$. Montrez l'identité (pour tout angle de polarisation γ)

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\gamma\rangle \otimes |\gamma\rangle + |\gamma_\perp\rangle \otimes |\gamma_\perp\rangle)$$

4. Représentez les 4 états de Bell en coordonnées. Utilisez la représentation canonique $|0\rangle = (1, 0)^T$ et $|1\rangle = (0, 1)^T$.

Exercice 2 *Opération unitaire créant l'intrication.*

Soit $|x\rangle \otimes |y\rangle$ avec $x, y = 0, 1$ les 4 états de la "base computationnelle" (ou canonique) pour deux 2 qubits. On définit l'opération unitaire *CNOT* (appelée "control-not")

$$CNOT|x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y \oplus x\rangle$$

où $y \oplus x$ est l'addition modulo 2. Cette opération modélise certaines interactions entre degrés de liberté de spin, et est responsable de l'intrication.

1. Vérifiez que

$$|B_{xy}\rangle = (CNOT)(H \otimes I)|x\rangle \otimes |y\rangle$$

Faites le calcul en notation de Dirac. Est ce que la partie $(H \otimes I)|x\rangle \otimes |y\rangle$ est déjà intriquée? Justifiez votre réponse.

2. Donnez le tableau des composantes des matrices *CNOT* et $H \otimes I$ ainsi que leur produit dans la base computationnelle. Vérifiez que les matrices sont unitaires.
3. A partir de l'unitarité des matrices, donnez une preuve (compacte) de l'orthonormalité des états $|B_{xy}\rangle$.

Exercice 3 Opérations de mesure sur les états de Bell.

Une paire EPR est produite par une source et chaque partie de la paire est transmise à Alice et Bob. Reprendre et détaillez les calculs de la discussion du cours et des notes sur les différents scénarios de mesure d’Alice et Bob sur les deux parties d’un état de Bell. On suppose qu’Alice et Bob font des mesures locales et ne communiquent pas.

1. Alice et Bob mesurent simultanément dans la base

$$\{|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle, |\alpha_\perp\rangle \otimes |\beta\rangle, |\alpha\rangle \otimes |\beta_\perp\rangle, |\alpha_\perp\rangle \otimes |\beta_\perp\rangle\}.$$

Donnez les résultats possibles des mesures et les probabilités correspondantes que le postulat de la mesure prédit.

2. Donnez les états (à un qubit) observés *localement* par Alice et Bob chacun dans son labo et les probabilités correspondantes.
3. Maintenant Alice et Bob ne mesurent pas simultanément mais l’un après l’autre. On supposera ici que Alice mesure avant Bob. Alice mesure dans la base $\{|\alpha\rangle, |\alpha_\perp\rangle\}$ (et Bob ne fait rien). Donnez les états résultants possibles et les probabilités correspondantes. On utilisera les projecteurs

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes I \quad \text{et} \quad |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp| \otimes I$$

(ce calcul est plus facile en utilisant l’identité de l’exercice 1 avec $\gamma = \alpha$ et/ou α_\perp). Ensuite Bob mesure dans la base $\{|\beta\rangle, |\beta_\perp\rangle\}$ (et Alice ne fait rien). Donnez les états possibles résultants. On utilisera les projecteurs

$$I \otimes |\beta\rangle\langle\beta| \quad \text{et} \quad I \otimes |\beta_\perp\rangle\langle\beta_\perp|$$

4. Dans la question précédente quels sont les états observés par Alice dans son labo et avec quelles probabilités. Même question pour Bob.
5. Y-a-t-il une différence *du point de vue local d’Alice et/ou Bob* si les mesures sont simultanées ou successives? Et si seule Alice fait une mesure et que Bob ne fait jamais rien : est ce que cela change quelque chose aux résultats *locaux* d’Alice?