Série 3 : 30 Septembre 2015
Traitement Quantique de l'Information

---

**Exercice 1** *Mesures de polarisation des photons.*

On suppose que l'on envoie des photons préparés dans l'état $|\Psi\rangle = \cos\theta\,|x\rangle + \sin\theta\,|y\rangle$. Cet état est un état de polarisation linéaire, aussi appelé $|\theta\rangle$ au cours. On va ensuite les observer avec un photodétecteur placé juste après un analyseur placé à un angle $\alpha$. Pour l'analyseur $\alpha$ on enregistre le nombre $p_\alpha = \pm 1$ suivant que le photon est transmis ou non dans le photodétecteur. L'observable correspondante en notation de Dirac est

$$P_\alpha = (+1)|\alpha\rangle\langle\alpha| + (-1)|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|$$

avec $\alpha_\perp = \alpha + \frac{\pi}{2}$.

1. Calculez la probabilité de détection et de non-détection : $\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = \pm 1)$.

2. Calculez l'espérance et la variance de la variable aléatoire $p_\alpha$.

3. Considérez à présent l'observable

   $$P_\alpha = (+1)\,|\alpha\rangle\,\langle\alpha| + (-1)\,|\alpha_\perp\rangle\,\langle\alpha_\perp|$$

   Vérifiez que l'espérance et la variance trouvée au point précédent sont données par

   $$\mathrm{Exp}\,[p_\alpha] = \langle\Psi|\,P_\alpha\,|\Psi\rangle \;\text{ et }\; \mathrm{Var}\,[p_\alpha] = \langle\Psi|\,P_\alpha^2\,|\Psi\rangle - \langle\Psi|\,P_\alpha\,|\Psi\rangle^2$$

   Entrainez vous à faire les calculs en notation de Dirac et/ou en composantes.

4. On se donne maintenant deux analyseurs d'angles $\alpha$ et $\beta$. On considère les expériences suivantes :
   (i) on mesure $P_\alpha$ d'abord puis $P_\beta$ ensuite ;
   (ii) on mesure $P_\beta$ d'abord puis $P_\alpha$ ensuite.
   Donnez les deux distributions de probabilités correspondantes pour les événements possibles $(p_\alpha, p_\beta) = (\pm 1, \pm 1)$. Ces deux distributions sont-elles les mêmes ? Discutez l'implication physique de ce résultat.

**Exercice 2** *Sphère de Bloch et matrices de Pauli.*

Considérez l'état général d'un bit quantique

$$|\theta, \varphi\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\varphi}\sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle$$

Ces états sont représentés par un vecteur unité pointant dans la direction $(\theta, \varphi)$ ou par convention ou $\theta$ et $\varphi$ sont les angles en coordonnées sphériques.

1. Représentez sur la sphère de Bloch les trois bases orthonormées suivantes (vérifiez aussi que ces bases sont bien orthonormées).
   La "base $Z$" :
   $$\{|0\rangle,\ |1\rangle\}$$
   La "base $X$" :
   $$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\}$$
   La "base $Y$" :
   $$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)\}$$

2. Soit $|\theta, \varphi\rangle$ et $|\pi - \theta, \varphi + \pi\rangle$. Représentez ces deux états sur la sphère de Bloch. Maintenant calculez leur "bracket", c'est à dire leur produit scalaire en notation de Dirac (utilisez la base $Z$ pour faire le calcul).

3. Considérez les trois "matrices de Pauli"
   $$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$
   $$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|$$
   $$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$
   Calculez leur valeurs propres et vecteurs propres. En particulier montrez que les valeurs propres sont toujours $\pm 1$ et les vecteurs propres sont respectivement les bases dénommés $X$, $Y$ et $Z$ ci-dessus.