Série 8
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Codage superdense avec des paires EPR imparfaites.*

Alice est dans la Station Spatiale et Bob sur la Terre. Ils partagent une paire de photons dans l'état

$$|B_\theta\rangle = \cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle, \qquad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Alice possède le premier photon et Bob le second.

(a) Montrez que la paire est intriqué si et seulement si $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$.

(b) Pour envoyer un message $xy = 00, 01, 10, 11$ à Bob, Alice utilise le protocole usuel du codage superdense (car θ est inconnu). En d'autres termes pour envoyer 00 elle envoie tout simplement *son* photon à Bob ; pour envoyer 01 elle effectue l'opération unitaire σ_x sur *son* photon puis l'envoie à Bob ; pour envoyer 10 elle effectue l'opération unitaire σ_z sur *son* photon puis l'envoie à Bob ; pour envoyer 11 elle effectue l'opération unitaire $i\sigma_y$ sur *son* photon puis l'envoie à Bob. Calculez les 4 états possibles de la paire quand Bob recoit le photon d'Alice.

(c) Supposons concrètement qu'Alice désire envoyer le message 00. Lorsque Bob possède les deux photons de la paire, il utilise le protocole usuel du codage superdense (car θ est inconnu). Il effectue donc une mesure dans la base de Bell. Cette base est constituée des 4 états

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$
$$|B_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle),$$
$$|B_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle),$$
$$|B_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle.$$

Quels sont les messages possibles observés par Bob et quelles sont leurs probabilités ? Pour quel $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ la probabilité d'erreur de transmission est-elle minimale ? Maximale ?

Exercice 2 *Hamiltonien de Heisenberg et intrication de l'état fondamental.*

Rappel : Nous avons vu que l'énergie d'interaction d'un moment magnétique $\vec{M}$ avec un champ magnétique $\vec{B}$ est donnée par$H = -\vec{B} \cdot \vec{M}$. La différence entre cette quantité et son minimum est l'énergie qu'il faut fournir pour faire dévier la boussole de son état d'équilibre (voir figure).

Interaction entre deux moments magnétiques : Prenons maintenant deux moments magnétiques et supposons pour le moment qu'il n'y a aucun champ magnétique externe. Leur énergie d'interaction est proportionnelle à $\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2$. Le minimum est atteint pour la configuration d'équilibre de la figure qui correspond à prendre $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ opposés. Notez que $\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2$ est la fonction la plus simple des deux vecteurs $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ qui soit invariante sous les rotations.

En M.Q. pour deux spins 1/2 on a $\vec{M}_1 = g_1 \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_1$ et $\vec{M}_2 = g_2 \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_2$. On posera donc pour l'hamiltonien d'interaction

$$H = \hbar J \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

C'est l'hamiltonien de Heisenberg, L'espace de Hilbert des deux spins (ou deux q-bits !) est $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ et la formule ci-dessus signifie en fait

$$H = \hbar J \left(\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y + \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \right)$$

L'hamiltonien de Heisenberg est donc une matrice 4×4.

(a) Écrire la matrice 4×4 explicitement.

(b) Montrez que

$$H = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + 2\hbar J \left(\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \sigma_1^- \otimes \sigma_2^+ \right)$$

(c) Poser $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et vérifiez les relations

$$\begin{array}{ll} \sigma_z |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle & \sigma_z |\downarrow\rangle = - |\downarrow\rangle \\ \sigma_+ |\uparrow\rangle = 0 & \sigma_+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \\ \sigma_- |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle & \sigma_- |\downarrow\rangle = 0 \end{array}$$

Pour cette raison on appelle souvent σ_+ et σ_- les "raising and lowering operators".

(d) Analysez l'action de H sur l'état dit "singulet"

$$|\psi_{0,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \right)$$

et sur les états "triplets"

$$|\psi_{1,1}\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle , \qquad |\psi_{1,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \right) , \qquad |\psi_{1,-1}\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

En déduire les niveaux d'énergie (ou valeurs propres) de H et les placer sur un axe (vertical).

(e) *Facultatif* : On ajoute maintenant un champ magnétique extérieur $\vec{B} = (0, 0, B)$. L'hamiltonien total est maintenant

$$H = -\gamma_1 \vec{B} \cdot \vec{\sigma}_1 - \gamma_2 \vec{B} \cdot \vec{\sigma}_2 + \hbar J \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

On posera $\gamma_1 B = \hbar\omega_1$ et $\gamma_2 B = \hbar\omega_2$. Ecrire la matrice 4×4 explicitement. On regarde maintenant le cas $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0/2$ (ou $\gamma_1 = \gamma_2$). En utilisant directement d) donnez les valeurs et vecteurs propres et faîtes un graphe des niveaux d'énergie en fonction de B.