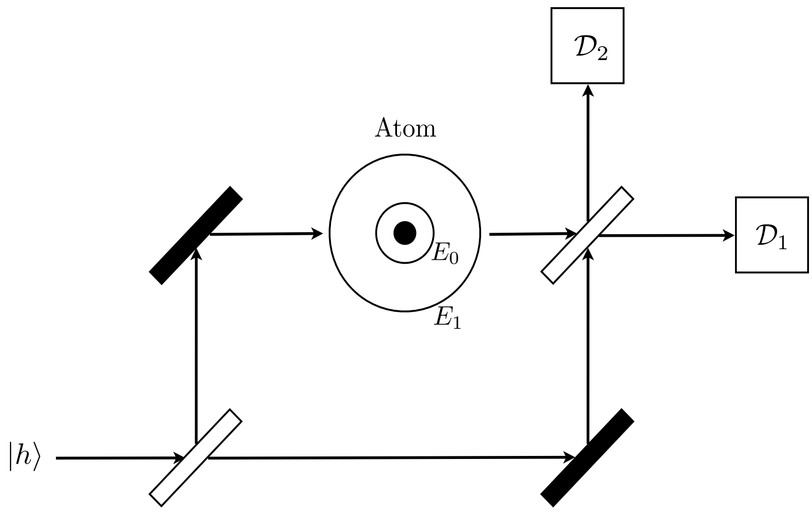
Série 7
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Variation sur l'interféromètre de Mach-Zehnder*

On considère un interféromètre avec deux miroirs semitransparents et deux miroirs réfléchissants comme dans la série ?. De plus un atome, avec deux niveaux d'énergies $E_2 > E_1$, est placé sur un des chemins possibles de l'interféromètre, comme sur la figure ci-desous. Cette fois on veut tenir compte du fait que le photon pourrait être absorbé par l'atome.



(a) Quelle est la condition sur la fréquence du photon pour que celui-ci puisse être absorbé par l'atome ?

L'espace de Hilbert du photon est maintenant modélisé par un espace *à trois dimensions* dont les états de base orthonormés sont

$$|h\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad |v\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad |\mathrm{abs}\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Les mirroirs semi-transparents agissent comme $S = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Les mirroirs réfléchissants sont modélisés par la matrice $R = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Le processus d'absorption du photon par l'atome agit comme $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Calculez $M|h\rangle, M|v\rangle, M|\text{abs}\rangle$ pour $M = S, R, P$. Faites le calcul comme vous voulez mais, <u>donnez les résultats en notation de Dirac</u>.

(c) L'état initial du photon est $|h\rangle$. Calculez l'état du photon à la sortie du second miroir semi-transparent. Puis calculez les probabilités que le photon soit détecté dans D_1, dans D_2 et pas du tout détecté (c.a.d absorbé par l'atome). <u>Faites les calculs en notation de Dirac</u>.

(d) On pourrait considérer d'autres modèles pour l'interaction entre le photon et l'atome, auquel cas il faudrait remplacer la matrice P. Laquelle de ces deux matrices serait légitime, c.a.d compatibles avec les principes de la mécanique quantique : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$? Justifiez ! (pas de longs calculs).

Exercice 2 *Un calcul qui sera utile pour l'algorithmique*

On adopte la notation $|b\rangle$, $|c\rangle$ pour les états de la base canonique $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ (c.à.d. que $b = 0, 1$ et $c = 0, 1$). On rappelle que la matrice de Hadamard est en notation de Dirac $H = |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$. Vérifiez que

$$\begin{aligned} H\,|b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + (-1)^b\,|1\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{c=0}^{1}(-1)^{bc}\,|c\rangle \end{aligned}$$

et vérifiez pour $n = 2$

$$H^{\otimes n}\,|b_1, ..., b_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{(c_1,...,c_n)\in\mathbb{F}_2^n}(-1)^{\sum_{i=1}^n b_i c_i}\,|c_1, ..., c_n\rangle$$

et ensuite le cas pour n général.

Indication : Ici $H^{\otimes n}$ représente le produit tensoriel de H avec lui même n fois. De plus nous rappelons que $H \otimes H|b_1, b_2\rangle = H \otimes H|b_1\rangle \otimes |b_2\rangle = H|b_1\rangle \otimes H|b_2\rangle$ et de mm̂e pour $n \geq 3$.

Exercice 3 *Représentations sur la sphère de Bloch.*

On rappelle qu'un bit quantique

$$\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle$$

est représenté par le vecteur pointant dans la direction (θ, ϕ) en coordonnées sphériques sur une sphère (appelée dans ce contexte sphère de Bloch).

Calculez et représentez sur la sphère de Bloch les qubits suivants (dessinez une sphère avec les axes x, y, z pour chaque question **(a)-(d)**)

(a) $|\uparrow\rangle$ et $e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_z}|\uparrow\rangle$.

(b) $|\uparrow\rangle$ et $e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_x}|\uparrow\rangle$.

(c) $\frac{|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$ et $e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_z}(\frac{|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}})$.

(d) Supposons que la variable t représente le temps et a un nombre réel positif. Représentez la trajectoire du vecteur

$$e^{it\frac{a}{2}\sigma_z}(\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle)$$

sur la sphère de Bloch. Cette trajectoire est-elle périodique ? Si oui, quelle est sa période ?

Exercice 4 *Billets de banque quantiques.*

En 1970 S. Wiesner [1] eut l'idée des billets de banque quantiques (ou plutôt chèques quantiques). Il s'agit dans cet exercice de discuter cette idée (essentiellement sans faire de calculs).

La banque génère deux suites de bits classiques indépendants et uniformément aléatoires $e_1, \cdots, e_N$, $e_i = 0, 1$ et $x_1, \cdots, x_N$, $x_i = 0, 1$. Les deux séquences sont gardées secrètes par la banque. N ($N = 100$ par exemple) photons sont piégés dans N cavités insérées dans un "billet". Si $e_i = 0$ le photon i est préparé dans un état de polarisation $|x_i\rangle \in \{|0\rangle, |1\rangle\}$. Si $e_i = 1$ le photon i est préparé dans un état de polarisation $H|x_i\rangle \in \{|+\rangle, |-\rangle\}$. On rappelle ici que H est la matrice de Hadamard et $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

La banque édite sur le billet un numéro de série S. Le numero S est public, mais seule la banque connait la correspondance $e_1, \cdots, e_N \leftrightarrow S$.

(a) Une personne présente le billet à la banque. Comment la banque vérifie t-elle que le billet n'est pas un faux ? En particulier comment le fait-elle sans détruire ce billet. Donnez une discussion essentiellement qualitative sans faire de calculs.

(b) Un malfaiteur peut-il copier le billet de banque avec une seule "machine unitaire" ? Justifiez.

Exercice 5 *Un calcul utile pour la dérivation des inégalités de Bell.*

Soit les observables (polarisation)

$$A = (+1)|\alpha\rangle\langle\alpha| + (-1)|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|$$

et

$$B = (+1)|\beta\rangle\langle\beta| + (-1)|\beta_\perp\rangle\langle\beta_\perp|.$$

Calculez $\langle\psi|A \otimes B|\psi\rangle$ pour les états

1. $|\psi\rangle = |\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle$. Faire le calcul en détail. On pourra utiliser $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ pour mettre le résultat sous forme agréable et utile (au cours plus tard).
2. $|\psi\rangle = |B_{00}\rangle$. Vous devez trouver le résultat $\cos(2(\alpha - \beta))$. Le calcul peut etre fait de plusieures facon mais les formules suivantes peuvenet permettre de simplifier vos calculs $|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\alpha\rangle + |\alpha_\perp\alpha_\perp\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta\beta\rangle + |\beta_\perp\beta_\perp\rangle)$.

---

1. Pour en savoir plus sur les liens entre cette idée et le protocole BB84, ainsi que sur les liens entre les prtagonistes eux mêmes et le processus historique de ces découvertes consultez l'article historique "historical-recollections-quantum-crypto" sur la page web du cours.

Exercice 6 *Relation d'incertitude de Heisenberg*

Le but de cet exercice est de prouver l'inégalité de Heisenberg

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle|.$$

pour deux observables A et B (matrices hermitiennes). Par définition :

$$\Delta A = \langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2, \qquad \Delta B = \langle\psi|B^2|\psi\rangle - \langle\psi|B|\psi\rangle^2$$

sont les varainces obtenues sur l'histogramme des mesures des observables A et B lors de mesures pour le système dans létat $|\psi\rangle$ (ou un ensemble de systèmes tous dans létat $|\psi\rangle$). D'autrepart par définition $[A,B] = AB - BA$ est le "commutateur" entre les observales A et B.

Indication : Tout d'abord considérez les obserables de moyenne nulle (pourquoi est elle nulle ?) $A' = A - \langle\psi|A|\psi\rangle$ et $B' = B - \langle\psi|B|\psi\rangle$. Montrez que l'inégalité est equivalente à

$$\Delta A' \cdot \Delta B' \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[A',B']|\psi\rangle|.$$

Ensuite, considérez le vecteur $(A' + i\lambda B')|\psi\rangle$, λ un nombre réel. Montrez que sa norme au carré est un polynome du second degré en λ. Ce polynome doit être positif pour tout λ : pourquoi ? En déduire l'inégalité de Heisenberg.

Application : Soit $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$, et $A = \sigma_x$, $B = \sigma_y$. Appliquez l'inégalité de Heisenberg.