Série 12
Traitement quantique de l'information

Exercice 1 *Algorithme de Grover pour $N = 4$*

Soit $x \in \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ et $f(x) = 1$ si et seulement si $x = x_0$. Sinon $f(x) = 0$. On recherche x_0 grâce à un oracle qui retourne la valeur de f quand on lui présente une entrée.

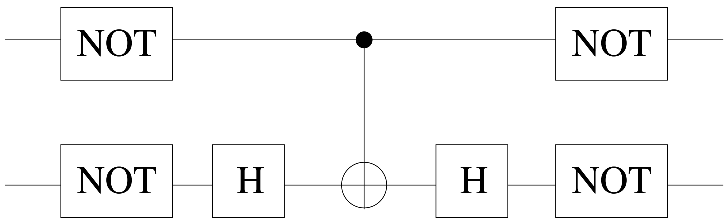
1. D'après la théorie, quelle est le nombre de questions à poser à l'oracle quantique si on utilise le circuit de Grover ?
2. Dans le circuit de Grover on utilise l'opérateur suivant :

$$\mathbb{I} - 2\underbrace{|00...0\rangle}_{n \text{ fois}} \langle 00...0|$$

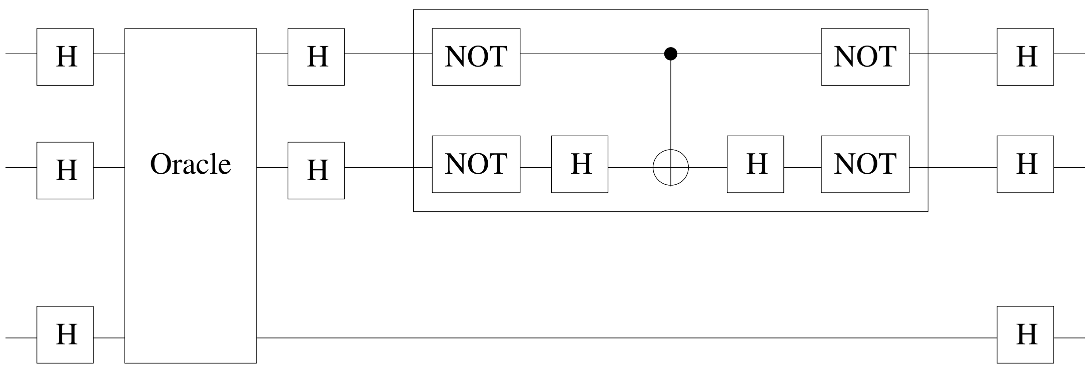
   Remarquez que cet opérateur agit comme :

$$\begin{aligned} &|00...0\rangle \to -|00...0\rangle \\ &|b_1 b_2 ... b_n\rangle \to |b_1 b_2 ... b_n\rangle \ \text{ si } \ (b_1 b_2 ... b_n) \neq (00...0) \end{aligned}$$

   Montrez que pour $n = 2$ (le cas présent) cet opérateur peut être réalisé par le circuit suivant :



3. Prenez le circuit de l'algorithme de Grover pour $N = 4$ et donnez l'état quantique à chaque étape. Faites une représentation géométrique de l'état (dans un espace à 2 dimensions approprié). Confirmez que l'état final donne bien la réponse x_0 voulue et que l'on a posé une seule question à l'oracle.



Exercice 2 *Identité utile pour la réalisation expérimentale de la porte CNOT par RMN*

Dans cet exercice nous prouvons une identité utile à la réalisation expérimentale de la porte CNOT. Elle forme la base de la de la réalisation expérimentale par RMN des algorithmes de Deutsch-Josza et de Shor (pour 7 à 10 qubits).

On considère deux qubits (par exemple : spins 1/2, systèmes à deux niveaux) et les opérateurs suivants :

- Rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe z pour chaque spin :

$$R_1 = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1^z}{2}\right) \text{ et } R_2 = \exp(-i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_2^z}{2})$$

- Porte de Hadamard H.
- L'opérateur d'évolution

$$U = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}\right)$$

  associé à l'hamiltonien d'interaction pour deux spins $\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$. On laisse évoluer le système pendant un temps $t = \frac{\pi}{4J}$.

1. Dessinez le circuit correspondant au produit des matrices

$$(I_{2\times 2} \otimes H)\, U\, (R_1 \otimes R_2)\, (I_{2\times 2} \otimes H)$$

2. Calculez ce produit et montrez qu'il est égal à la matrice 4×4 de la porte CNOT