

Chapter 5

Intrication Quantique

Dans ce chapitre, nous étudions la nature des corrélations présentes dans les états "intriqués". Ce sont de véritables corrélations de type quantique intrinsèquement présentes dans des systèmes quantiques à plusieurs qubits. Ces corrélations n'ont pas d'équivalent classique, en d'autres termes, elles ne peuvent pas être décrites par des distributions de probabilité classiques. On utilise le terme intrication pour désigner ce type special de corrélations dont la nature est purement quantique.

Tout d'abord nous allons discuter le prototype des états intriqués pour deux qubits: les états de Bell. Nous abordons ensuite le sujet des inégalité de Bell¹. Ces inégalités, qui furent d'abord proposées par John Bell (~ 1964), donnent un critère d'intrication qui peut être vérifié expérimentalement. Ces expériences, qui furent d'abord réalisées par Aspect et Grangier, puis dans divers autres contextes, confirment les prédictions théoriques de la MQ.

L'intrication est une ressource importante dans le traitement quantique de l'information. Elle joue un rôle important dans plusieurs protocoles importants pour la communication quantique. Ici nous décrivons deux applications, sous leur forme la plus simple possible: la *téléportation* et le *codage superdense*. L'intrication a aussi été utilisée dans des protocoles de cryptographie quantique (Ekert 1991; ceci pourra faire l'objet d'un exercice). Toutes ces applications ont été réalisées expérimentalement. L'intrication joue aussi un rôle important dans le calcul quantique que nous aborderons plus tard dans le cours.

¹Nous allons en fait discuter une version plus transparente due à Clauser, Horne, Shimony, Holt (CHSH).

5.1 États de Bell

Le prototype des états intriqués est constitué des états de Bell. Ceux-ci forment une base orthonormée de $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$ qui est un espace à 4 dimensions. Les 4 états de Bell sont

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = U|00\rangle$$

$$|B_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = U|01\rangle$$

$$|B_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = U|10\rangle$$

$$|B_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = U|11\rangle$$

Dans ces états les deux qubits sont en quelque sorte corrélés: en effet dans l'état $|B_{00}\rangle$ les deux degrés de liberté de polarisation des deux photons sont parallèles, ou bien les deux états de spin sont parallèles. En fait il serait faux de penser que la direction (des deux spins p.ex) est up-up ou down-down. En effet le lecteur peut vérifier que

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\gamma\gamma\rangle + |\gamma_\perp\gamma_\perp\rangle) \quad (5.1)$$

où $|\gamma\rangle = \cos\gamma|0\rangle + \sin\gamma|1\rangle$. Ainsi les degrés de liberté ne pointent pas dans des directions précises. Néanmoins les directions des deux degrés de liberté sont corrélées.

Une paire de photons ou une paire de moments magnétiques (spins) peut être préparée dans un état de Bell. Pour cela il faut amener les deux degrés de liberté suffisamment près l'un de l'autre dans l'espace et les faire interagir. Si l'interaction est appropriée une corrélation est induite. La paire de particules peut ensuite être spatialement séparée. Si les particules ne sont pas affectées par leur environnement la corrélation des degrés de liberté de polarisation ou de spin est préservée.

Comme nous allons le voir dans ce chapitre les corrélations dont nous parlons n'ont pas d'analogie classique. On utilise le terme "intrication" pour désigner ce type spécial de corrélations. Les paires dans les états de Bell sont aussi appelées "paires EPR" car Einstein, Podolski et Rosen (ainsi que Schroedinger) furent parmi les premiers à attirer l'attention sur certaines propriétés en apparence paradoxales de ces états (pour les degrés de liberté de position et d'impulsion en fait).

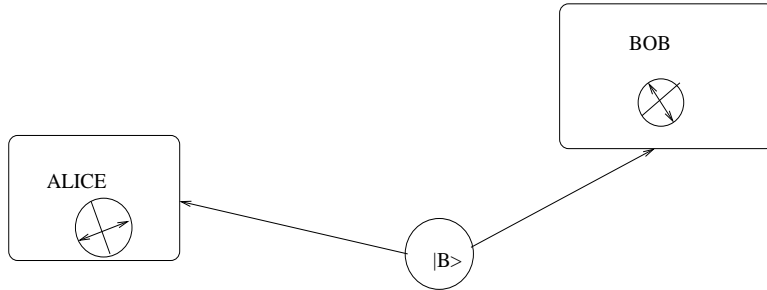


Figure 5.1: Alice et Bob partagent une paire intriquée.

Pour nous familiariser avec la subtilité de ces états nous commençons par discuter des scénarios de mesures possibles. Nous supposons qu'une source produit des paires de photons EPR, qu'Alice a capturé un photon dans son laboratoire, et que Bob a capturé l'autre photon dans son laboratoire (figure 2). Quelle que soit la distance entre les deux laboratoires les photons (leur polarisation) restent intriqués dans l'état $|B_{00}\rangle$. Regardons le résultat de plusieurs mesures simples qu'Alice et Bob pourrait faire, chacun dans leur propre laboratoire. *Dans ce paragraphe nous supposons qu'ils ne peuvent pas communiquer entre eux les résultats de ces mesures*. Nous examinons trois situations précises où: Alice mesure avant / Bob mesure après; Bob mesure avant / Alice mesure après; Alice et Bob mesurent simultanément.

- *Alice mesure avant et Bob après.* L'appareil de mesure d'Alice est formé par les projecteurs $\{|\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes I, |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp| \otimes I\}$. Selon le postulat de la mesure, l'état de Bell est projeté sur l'un des états

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes I |B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\alpha\alpha\rangle \rightarrow |\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle \quad \text{avec prob } \frac{1}{2}$$

$$|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp| \otimes I |B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\alpha_\perp\alpha_\perp\rangle \rightarrow |\alpha_\perp\rangle \otimes |\alpha_\perp\rangle \quad \text{avec prob } \frac{1}{2}$$

Par conséquent Alice observe *son photon* dans l'état $|\alpha\rangle$ ou $|\alpha_\perp\rangle$ avec probabilité 1/2 (Bob, de son côté, ne sait rien, et ne sait même pas qu'Alice a effectué une mesure!). Pour effectuer sa mesure Bob choisit une base $\{|\beta\rangle, |\beta_\perp\rangle\}$. Si son photon est dans l'état $|\alpha\rangle$ avant la mesure, celui-ci est projeté sur $|\beta\rangle$ avec probabilité $\cos^2(\alpha - \beta)$ ou $|\beta_\perp\rangle$ avec probabilité $\sin^2(\alpha - \beta)$. De même, si son photon est dans l'état $|\alpha_\perp\rangle$ il obtient le même résultat avec \cos^2 et \sin^2 interchangés. Le fait que Bob ne connaît pas l'état initial de son photon, ou qu'il ne sait même pas si Alice a déjà mesuré, ne devrait pas vous déranger : le point est qu'il fait une expérience spécifique (mesure dans la base $|\beta\rangle, |\beta_\perp\rangle$) et

trouve un résultat net. Le résultat net dans le laboratoire de Bob est: le photon est dans l'état $|\beta\rangle$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou $|\beta_{\perp}\rangle$ avec probabilité $\frac{1}{2}$.

- *Bob mesure d'abord et Alice après.* La même discussion montre que, si Bob effectue des mesures en premier (dans la base $|\beta\rangle, |\beta_{\perp}\rangle$), tandis que Alice dort, puis Alice mesure après (dans la base $|\alpha\rangle, |\alpha_{\perp}\rangle$). Le résultat net de chacune des parties est le même que précédemment.
- *Bob et Alice mesurent simultanément.* Vous pensez peut-être (?) que les résultats sont différents si les deux parties effectuent des mesures simultanées. Essayons. Supposons qu'Alice et Bob effectuent des mesures simultanées dans la base

$$\{|\alpha\beta\rangle; |\alpha\beta_{\perp}\rangle; |\alpha_{\perp}\beta\rangle; |\alpha_{\perp}\beta_{\perp}\rangle\}.$$

L'état de Bell

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\gamma\gamma\rangle + |\gamma_{\perp}\gamma_{\perp}\rangle)$$

va être projeté sur l'un des quatre états de base. Donc, Alice sera en possession d'un photon dans l'état $|\alpha\rangle$ ou $|\alpha_{\perp}\rangle$ et Bob en possession d'un photon dans l'état $|\beta\rangle$ ou $|\beta_{\perp}\rangle$. La situation est exactement la même que précédemment! Il est très instructif de calculer les probabilités des états projetés respectifs. Alice constate que la probabilité de ses résultats $|\alpha\rangle$ (resp. $|\alpha_{\perp}\rangle$) valent

$$\frac{1}{2} \cos^2(\alpha\beta) + \frac{1}{2} \sin^2(\alpha\beta) = \frac{1}{2}$$

La même chose vaut pour Bob. Par conséquent, les conclusions qu'Alice et Bob déduisent de leurs mesures simultanées sont les mêmes que dans les cas non-simultanés ci-dessus. En fait l'ordre des mesures importe peu.

Résumons la situation. Lorsqu'Alice et/ou Bob effectuent des mesures locales successives ou simultanées sur leurs photons, quelle que soit leur choix de base ils trouvent le photon dans l'un des deux états de la base choisie avec une probabilité $\frac{1}{2}$. En d'autres termes l'entropie de la distribution de probabilité de leurs résultats locaux est maximale (elle est égale à $\ln 2 = 1$ bit). Alice et Bob déduisent que leur photon est dans un état "maximalement désordonné". Ceci est remarquable. En fait, si ils ne savent pas que la source a produit une paire intriquée ou si personne ne leur dit que les deux photons

sont intriqués, et qu'ils n'ont aucun moyen de communiquer leur mesures, ils n'ont aucun moyen de détecter l'intrication. Comme nous le verrons la situation est encore plus subtile. Alice et Bob peuvent affirmer que leurs photons sont intriqués si ils sont autorisés à communiquer. Par communiquer, nous entendons la transmission d'un message classique. Il semble que nous n'ayons aucun moyen de savoir si nous sommes intriqués avec des extraterrestres lointains dans l'Univers en faisant uniquement des expériences locales dans notre partie de l'univers. Pour le savoir il faut communiquer avec eux.

5.2 Inégalités de Bell

Nous avons vu que s'il n'y a pas de communication entre Alice et Bob, ils ne peuvent pas en déduire que les photons sont dans un état intriqué. Chacun de son côté peut seulement déduire des mesures locales que l'état de son photon est hautement désordonné. Dans cette section, nous allons voir qu'en communiquant les résultats des mesures entre eux, Alice et Bob peuvent détecter l'intrication.

Les idées décrites ici ont été initiées par John Bell (1964), et motivée par un célèbre papier d'Einstein-Podolsky-Rosen (1935). Ces derniers affirmaient que les états intriqués ne constituent pas une "description complète" du système des deux particules, et pensaient qu'il devait exister une théorie de "type classique" qui donne la description complète du système. L'approche de Bell donne un critère expérimental pour décider si les corrélations d'une paire EPR *peut être décrite ou ne peut pas être décrite par une théorie classique*. L'idée générale est la suivante: si une paire de photons est décrite par une théorie classique alors certaines fonctions de corrélation appropriées des mesures d'Alice et Bob doivent satisfaire à des contraintes très particulières. Ces contraintes sont violées si la paire satisfait aux lois de la MQ. L'approche de Bell est capable de discriminer entre un vaste ensemble de théories classiques et la MQ. Les expériences fameuses d'Aspect-Grangier-Roger ont montré que la MQ gagne !

Le protocole expérimental. Une source S produit, à chaque instant n , une paire de photons. Un photon vole vers le laboratoire d'Alice et l'autre vers le laboratoire de Bob. Dans chaque laboratoire nos deux protagonistes fonctionnent de façon indépendante: les deux laboratoires sont distants, ne communiquent pas, et ne se soucient pas ce que l'autre fait.

- A chaque instant n , Alice utilise au hasard les analyseurs (Bob ne connaît pas les choix d'Alice)

$$\{|\alpha\rangle, |\alpha_{\perp}\rangle\} \quad \text{ou} \quad \{|\alpha'\rangle, |\alpha'_{\perp}\rangle\}$$

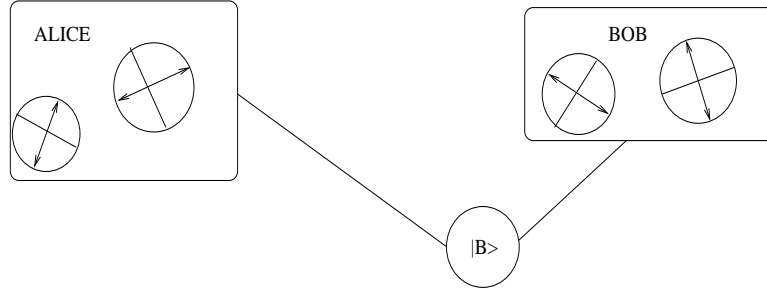


Figure 5.2: expérimental mis en place

pour mesurer la polarisation de son photon. Quand elle enregistre un clic dans le détecteur, elle définit $a_n = +1$ ou $a'_n = -1$. Lorsque le détecteur ne clique pas elle enregistre $a_n = -1$ ou $a'_n = +1$.

- A chaque instant n , Bob utilise au hasard les analyseurs (Alice ne connaît pas les choix de Bob)

$$\{|\beta\rangle, |\beta_\perp\rangle\} \quad \text{ou} \quad \{|\beta'\rangle, |\beta'_\perp\rangle\}$$

pour mesurer la polarisation de son photon. Quand il enregistre un clic dans le détecteur, il enregistre $b_n = +1$ ou $b'_n = -1$. Lorsque le détecteur ne clique pas il enregistre $b_n = -1$ ou $b'_n = +1$.

- une fois les mesures terminées Alice et Bob passent à une phase de communication classique. Par exemple, ils se rencontrent ou se téléphonent (ou bien tweetent des messages) et discutent de leurs mesures. Ils classent les résultats selon les quatre configurations expérimentales. A chaque instant temps n les arrangements possibles des analyseurs étaient

$$1 = (\alpha, \beta); \quad 2 = (\alpha, \beta'); \quad 3 = (\alpha' \beta); \quad 4 = (\alpha' \beta')$$

Pour chaque arrangement ils calculent les moyennes empiriques suivantes

$$\frac{1}{N_1} \sum_{n_1} a_{n_1} b_{n_1}, \quad \frac{1}{N_2} \sum_{n_2} a_{n_2} b'_{n_2}, \quad \frac{1}{N_3} \sum_{n_3} a'_{n_3} b_{n_3}, \quad \frac{1}{N_4} \sum_{n_4} a'_{n_4} b'_{n_4}$$

Ensuite, ils calculent la fonction de corrélation suivante

$$X_{exp} = \frac{1}{N_1} \sum_{n_1} a_{n_1} b_{n_1} + \frac{1}{N_2} \sum_{n_2} a_{n_2} b'_{n_2} - \frac{1}{N_3} \sum_{n_3} a'_{n_3} b_{n_3} + \frac{1}{N_4} \sum_{n_4} a'_{n_4} b'_{n_4}$$

Pour calculer cette corrélation Alice et Bob *doivent* communiquer pour échanger les variables a et b .

Prédiction des “théories classiques”. Nous supposons que les quantités qu’Alice et Bob mesurent correspondent à observables A, A', B, B' qui prennent simultanément des valeurs précises a, a', b, b' , indépendamment de la mesure. Fondamentalement, c’est comme dire qu’une particule a une certaine position et vitesse toutes deux bien définies (ici analogue à a et a') en toute circonstance. C’est une hypothèse habituelle de la physique classique. En outre, nous supposons que les résultats d’Alice et Bob peuvent être modélisés par une distribution de probabilité jointe²

$$\text{Prob}(a, a', b, b')$$

La prédiction théorique correspondant à *chaque* moyenne empirique ci-dessus est

$$\mathbf{E}[ab], \mathbf{E}[ab'], \mathbf{E}[a'b], \mathbf{E}(a'b')$$

La linéarité de l’espérance implique

$$\begin{aligned} X_{\text{théorique}} &= \mathbf{E}[ab] + \mathbf{E}[ab'] - \mathbf{E}[a'b] + \mathbf{E}(a'b') \\ &= \mathbf{E}[ab + ab' - a'b + a'b'] \end{aligned}$$

Remarquez maintenant que

$$ab + ab' - a'b + a'b' = a(b + b') + a'(b' - b)$$

et que

$$a(b + b') + a'(b' - b) = \pm 2$$

En effet, si $b = b'$, alors seul le premier terme survit et vaut ± 2 , tandis que si $b \neq b'$ seulement le second terme survit et vaut aussi ± 2 . La moyenne est forcément comprise dans l’intervalle $[-2, +2]$, et ainsi nous avons pour la prédiction des théories classiques

$$-2 \leq X_{\text{théorique}} \leq 2$$

C’est l’une des inégalités ”de type Bell“ obtenue par Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH).

Afin d’obtenir ce résultat nous avons supposé l’existence d’une distribution conjointe $P(a, a', b, b')$ pour des valeurs des observables A, A', B et B' (c’est ce qui permet d’écrire $X_{\text{théorique}}$ comme la valeur moyenne d’une quantité comprise dans $[-2, +2]$). En fait, cette hypothèse n’est pas évidente a

²Cette seconde hypothèse sera justifiée ci-dessous. Elle suit d’une hypothèse de localité des résultats de mesure. Elle englobe un vaste ensemble de théories classiques possibles déterministes ou non.

priori. Du point de vue expérimental, lorsque Alice et Bob se rencontrent, ils peuvent construire 4 histogrammes qui correspondent aux 4 arrangements possibles des analyseurs. ces quatres histogrammes correspondent à 4 distributions de probabilité:

$$P_1(a, b), P_2(a', b), P_3(a, b'), P_4(a', b')$$

Il n'est pas évident à priori que ces 4 distributions sont les marginales d'une distribution commune $P(a, a', b, b')$. Nous allons voir que pour une théorie classique locale cela doit effectivement être le cas.

Admettons que les lois de la physique sont "locales". Nous entendons par là que lorsque Alice (resp. Bob) effectuent ses mesures, les résultats d'Alice (resp. Bob) ne dépendent que de son propre choix local des analyseurs. C'est dire qu'étant donné un état du système décrit par un ensemble de variable classiques λ (appelées parfois variables cachées), les résultats des expériences d'Alice et Bob doivent tre indépendantes. Elles sont modélisées par des distributions dépendant uniquement de la configuration locale des analyseurs et de l'état du système:

$$p_{\mathcal{A}}(a|\alpha, \lambda), p_{\mathcal{A}}(a'|\alpha'; \lambda), p_{\mathcal{B}}(b|\beta, \lambda), p_{\mathcal{B}}(b'|\beta'; \lambda)$$

Alors pour les choix $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ fixes les histogrammes d'Alice et Bob sont donnés par

$$P_1(a, b) = \int d\lambda h(\lambda) p_{\mathcal{A}}(a|\alpha, \lambda) p_{\mathcal{B}}(b|\beta, \lambda)$$

$$P_2(a, b') = \int d\lambda h(\lambda) p_{\mathcal{A}}(a|\alpha, \lambda) p_{\mathcal{B}}(b'|\beta'; \lambda)$$

$$P_3(a', b) = \int d\lambda h(\lambda) p_{\mathcal{A}}(a'|\alpha'; \lambda) p_{\mathcal{B}}(b|\beta, \lambda)$$

$$P_4(a', b') = \int d\lambda h(\lambda) p_{\mathcal{A}}(a'|\alpha', \lambda) p_{\mathcal{B}}(b'|\beta', \lambda)$$

Ce sont les marginales d'une distribution de probabilité conjointe

$$P_{classe}(a, a', b, b') = \int d\lambda h(\lambda) p_{\mathcal{A}}(a|\alpha, \lambda) p_{\mathcal{A}}(a'|\alpha'; \lambda) p_{\mathcal{B}}(b|\beta, \lambda) p_{\mathcal{B}}(b'|\beta'; \lambda)$$

Remarquez que ce formalisme englobe les théories déterministes aussi. En effet les distribution ci-dessus, $h, p_{\mathcal{A}}$ et $p_{\mathcal{B}}$ pourraient tre des distributions de Dirac.

Prédiction de la MQ pour un Etat Bell. Tout d'abord nous remarquons que selon le formalisme quantique les mesures d' Alice et Bob sont des mesures des 4 observables (matrices hermitiennes)

$$A = (+1)|\alpha\rangle\langle\alpha| + (-1)|\alpha_{\perp}\rangle\langle\alpha_{\perp}| \quad A' = (+1)|\alpha'\rangle\langle\alpha'| + (-1)|\alpha'_{\perp}\rangle\langle\alpha'_{\perp}|$$

et

$$B = (+1)|\beta\rangle\langle\beta| + (-1)|\beta_{\perp}\rangle\langle\beta_{\perp}| \quad B' = (+1)|\beta'\rangle\langle\beta'| + (-1)|\beta'_{\perp}\rangle\langle\beta'_{\perp}|$$

A chaque instant n , l'état de la paire de photons est décrit par certains ket $|\Psi\rangle \in \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$. La prédiction de la mécanique quantique pour les quatre moyennes empiriques de Alice et Bob est

$$\langle\Psi|A \otimes B|\Psi\rangle \langle\Psi|A \otimes B'|\Psi\rangle \langle\Psi|A' \otimes B|\Psi\rangle \langle\Psi|A' \otimes B'|\Psi\rangle$$

Pour la fonction de corrélation

$$X_{MQ} = \langle\Psi|A \otimes B|\Psi\rangle + \langle\Psi|A \otimes B'|\Psi\rangle - \langle\Psi|A' \otimes B|\Psi\rangle + \langle\Psi|A' \otimes B'|\Psi\rangle$$

Maintenant, nous calculons cette quantité pour l'état de Bell

$$|\Psi\rangle = |B_{00}\rangle$$

La première moyenne est calculée en exprimant l'état de Bell comme $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\alpha\rangle + |\alpha_{\perp}\alpha_{\perp}\rangle)$.

$$\begin{aligned} \langle B_{00}|A \otimes B|B_{00}\rangle &= \frac{1}{2}\langle\alpha\alpha|A \otimes B|\alpha\alpha\rangle + \frac{1}{2}\langle\alpha_{\perp}\alpha_{\perp}|A \otimes B|\alpha_{\perp}\alpha_{\perp}\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\langle\alpha\alpha|A \otimes B|\alpha_{\perp}\alpha_{\perp}\rangle + \frac{1}{2}\langle\alpha_{\perp}\alpha_{\perp}|A \otimes B|\alpha\alpha\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle\alpha|A|\alpha\rangle\langle\alpha|B|\alpha\rangle + \frac{1}{2}\langle\alpha_{\perp}|A|\alpha_{\perp}\rangle\langle\alpha_{\perp}|B|\alpha_{\perp}\rangle \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 - |\langle\alpha|\beta_{\perp}\rangle|^2\right) + \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \left(|\langle\alpha_{\perp}|\beta\rangle|^2 - |\langle\alpha_{\perp}|\beta_{\perp}\rangle|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos^2(\alpha\beta) - \sin^2(\alpha - \beta)\right) - \frac{1}{2}\left(\sin^2(\alpha\beta) - \cos^2(\alpha - \beta)\right) \\ &= \cos^2(\alpha\beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \cos 2(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Effectuant des calculs similaires pour les autres moyennes, nous trouvons

$$X_{MQ} = \cos 2(\alpha - \beta) + \cos 2(\alpha - \beta') - \cos 2(\alpha' - \beta) + \cos 2(\alpha' - \beta')$$

Cette quantité est maximisée pour le choix suivant des angles (et toutes les rotations globales de ce choix, voir figure 4).

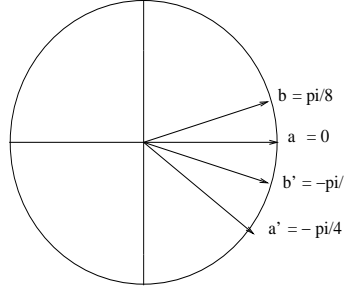


Figure 5.3: Choix optimal de l'orientation des l'analyseurs

$$\alpha = 0, \quad \alpha' = -\frac{\pi}{4}, \quad \beta = \frac{\pi}{8}, \quad \beta' = -\frac{\pi}{8}$$

et est égale à

$$X_{MQ} = \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$$

Nous constatons que l'inégalité CHSH est violée car $2\sqrt{2} > 2!$ Pour les trois autres états Bell on trouve le même résultat.

En fait la MQ prédit que les quatre histogrammes de Bob et Alice sont

$$\begin{aligned} P_1(a, b) &= \frac{1}{4}(1 + ab \cos 2(\alpha\beta)) \\ P_2(a, b') &= \frac{1}{4}(1 + ab' \cos 2(\alpha\beta')) \\ P_3(a', b) &= \frac{1}{4}(1 + a'b \cos 2(\alpha'\beta)) \\ P_4(a', b') &= \frac{1}{4}(1 + a'b' \cos 2(\alpha'\beta')) \end{aligned}$$

Par exemple: $P_2(+1, -1) = |\langle \alpha\beta'_\perp | B_{00} \rangle|^2 = \frac{1}{4}(1 - \cos 2(\alpha\beta))$. Il y a des choix particuliers des angles $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ pour lesquels ces histogrammes *ne sont pas les marginales* d'une distribution commune $P(a, b, a', b')$. En effet si c'était le cas nous aurions du trouver $-2 \leq X \leq 2$. Ainsi les corrélations présentes dans les résultats de mesures ne peuvent pas être décrites par une distribution de probabilité classique. Elles sont décrite par l'état intriqué de Bell!

Remarque. On dit souvent que les états intriqués possèdent des “corrélations non-locales” car les deux photons peuvent être séparés d'une distance arbitraire, néanmoins l'inégalité de Bell est violée (c.a.d $X = 2\sqrt{2} > 2$). Néanmoins, toutes les interactions connues sont locales au sens où les forces décroissent avec la distance, et les mesures faites dans les laboratoires sont

locales. Il faut donc faire attention lorsque l'on manipule les termes "local" et "non-local" en physique quantique. Les états intriqués possèdent des corrélations non-locales mais les interactions sont locales. De plus on ne peut pas mettre en évidence l'intrication en faisant uniquement de opérations locales.

Expériences. Aspect-Grangier-Roger ont montré dans les années 1980 que l'expérience est en accord avec la MQ et non pas avec les théories classiques. Ces expériences nous forcent à abandonner la description classique. Une des difficultés expérimentales est de faire tourner les analyseurs d'Alice et Bob suffisamment rapidement pour que les événements de mesure soient séparés par un intervalle de temps plus court que le temps que mettrait la lumière pour parcourir la distance séparant Alice et Bob. Sinon, on pourrait argumenter qu'une certaine forme de communication classique ou interaction conspire pour établir les corrélations non-locales pendant la mesure.

5.3 La téléportation quantique

Supposons qu'Alice et Bob soient séparés dans l'espace et que Alice possède un qubit dans l'état

$$|\Phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

L'état (c.a.d α et β) n'est pas nécessairement connu pour Alice et n'est pas connu pour Bob. Ils partagent également une paire intriquée

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

et ont aussi à leur disposition un canal de communication classique.

Nous allons expliquer que par l'envoi de seulement deux bits classiques d'information sur le canal classique, Alice peut *téléporter* l'état de son qubit vers Bob. Ici, *téléportation* signifie que $|\Phi\rangle$ est détruit dans le laboratoire d'Alice et est reconstruit dans le laboratoire de Bob. Notez que la destruction de $|\Phi\rangle$ dans le laboratoire d'Alice est nécessaire à cause du théorème de non-clonage. Après le processus de téléportation, Bob sait qu'il possède l'état $|\Phi\rangle$, mais ne connaît toujours pas l'état lui-même (c'est à dire qu'il ne connaît pas α et β). Nous soulignons que le processus de téléportation nécessite un transport physique d'information classique (stockée dans de la matière) dans la phase de communication classique entre Alice et Bob. Bien entendu, cette phase de communication classique ne peut pas se produire à une vitesse supérieure à celle de la lumière, de sorte que l'ensemble du

processus de téléportation ne viole pas les principes de la relativité. Nous notons également que le support matériel de l'état $|\Phi\rangle$ (par exemple, la polarisation du photon, le spin de l'électron, les degrés de liberté atomiques ou moléculaires) n'est pas nécessairement le même dans les laboratoires d'Alice et de Bob .

On résume parfois la téléportation par la " loi " suivante

teleporter, 1 Qbit, = , communiquer, 2, Cbits, +, partager 1, paire, EPR

La téléportation peut être considérée comme une forme de communication entre Alice et Bob qui partagent un canal classique et un "canal constitué de paires intriquées" (canal EPR).

Le protocole.

- Une source produit une paire EPR de particules dans l'état de Bell $|B_{00}\rangle_{23}$. La particule, appelée particule 2 est envoyée à Alice et la particule, appelée particule 3 est envoyée à Bob. L'espace de Hilbert du système intriqué 23 est $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 = C^2 \otimes C^2$.
- Alice prépare une particule, appelée 1, dans l'état $|\Phi\rangle_1 = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. L'espace de Hilbert de la particule 1 est $\mathcal{H}_1 = C^2$.
- L'espace total de Hilbert du système composite 123 est $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 = C^2 \otimes C^2 \otimes C^2$. L'état complet du système est

$$|\Psi\rangle = |\Phi\rangle_1 \otimes |B_{00}\rangle_{23}$$

A ce stade, un bref calcul facilitera la discussion qui suit

$$|\Psi\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

- Alice fait une mesure locale dans son laboratoire, à savoir sur les particules 12. Elle utilise un appareil modélisé par la base de mesure dans $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

$$\{|B_{00}\rangle_{12}, |B_{01}\rangle_{12}, |B_{10}\rangle_{12}, |B_{11}\rangle_{12}\}$$

Les projecteurs associés pour l'ensemble du système sont

$$P_{00} = |B_{00}\rangle\langle B_{00}| \otimes I_3, P_{01} = |B_{01}\rangle\langle B_{01}| \otimes I_3, P_{10} = |B_{10}\rangle\langle B_{10}| \otimes I_3, P_{11} = |B_{11}\rangle\langle B_{11}| \otimes I_3$$

Comme d'habitude, le résultat de la mesure est l'un des quatre états projetés possibles (à une normalisation près; vérifier ce calcul et aussi que la probabilité de chaque résultat est $\frac{1}{4}$)

$$P_{00}|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|B_{00}\rangle_{12} \otimes (\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3)$$

$$P_{01}|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|B_{01}\rangle_{12} \otimes (\beta|0\rangle_3 + \alpha|1\rangle_3)$$

$$P_{10}|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|B_{10}\rangle_{12} \otimes (\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3)$$

$$P_{11}|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|B_{11}\rangle_{12} \otimes (-\beta|0\rangle_3 - \alpha|1\rangle_3)$$

- Pour chacun de ces résultats possibles, Bob possède l'un des quatre états

$$\begin{aligned} \alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3 &= |\Phi\rangle \\ \beta|0\rangle_3 + \alpha|1\rangle_3 &= X|\Phi\rangle \\ \alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3 &= Z|\Phi\rangle \\ \beta|0\rangle_3 - \alpha|1\rangle_3 &= iY|\Phi\rangle \end{aligned}$$

mais il ne sait pas lequel, étant donné qu'il ne connaît pas le résultat de la mesure d'Alice.

- Alice connaît le résultat de sa mesure (dans son laboratoire). C'est l'un des quatre états de Bell. Ce résultat peut être codé par deux bits classiques, puis communiqué à Bob sur le canal classique,

$$00, 01, 10, 11$$

Dès que Bob reçoit le message d'Alice, il sait qu'elle a terminé ses opérations et possède deux bits d'information nécessaires pour décider quelle est l'opération *unitaire* qu'il doit effectuer sur son état afin de récupérer $|\Phi\rangle$,

$$\begin{aligned} I(\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) &= |\Phi\rangle \\ X(\beta|0\rangle_3 + \alpha|1\rangle_3) &= |\Phi\rangle \\ Z(\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) &= |\Phi\rangle \\ -iY(\beta|0\rangle_3 - \alpha|1\rangle_3) &= |\Phi\rangle \end{aligned}$$

5.4 Codage superdense

Supposons qu'Alice et Bob ont mis en place un canal quantique sur lequel ils peuvent envoyer qubits (par exemple une fibre optique sur laquelle les photons voyagent). On suppose aussi qu'Alice et Bob partagent une paire EPR. Combien de bits d'information classiques peuvent-ils communiquer en envoyant un seul qubit à travers le canal quantique?

La réponse: 2 bits d'information classique peuvent être transmis par Alice à Bob, en envoyant seulement 1 Qbit tant qu'ils partagent une paire EPR. Le protocole qui réalise ceci s'appelle "codage superdense" (dense coding).

La "loi" du codage superdense peut être résumée ainsi:

communiquer, 2, Cbits, = envoyer, 1, Qbit + partager, 1, paire, EPR

Le protocole.

- Une paire EPR dans l'état $|B_{00}\rangle$ est préparée par une source. Chaque particule de la paire est envoyée à Alice et Bob .
- Alice veut communiquer deux bits d'information à Bob :

- Pour envoyer 00 elle laisse sa particule intacte (ou applique la matrice unitaire I) et envoie sa particule à Bob. Bob reçoit la particule et est maintenant en possession de l'état $|B_{00}\rangle$ tout entier

$$|B_{00}\rangle$$

- Pour envoyer 01 elle applique la matrice unitaire X à sa particule, puis envoie sa particule à Bob. Bob est maintenant en possession de la paire dans l'état

$$X_1 \otimes I_2 |B_{00}\rangle = |B_{01}\rangle$$

- Pour envoyer 10, elle applique la matrice unitaire Z à sa particule, puis envoie sa particule. Bob est maintenant en possession de la paire dans l'état

$$Z_1 \otimes I_2 |B_{00}\rangle = |B_{10}\rangle$$

- Pour envoyer 11, elle applique la matrice unitaire iY à sa particule, puis envoie physiquement sa particule. Bob est maintenant en possession de la paire dans l'état

$$(iY)_1 \otimes I_2 |B_{00}\rangle = |B_{11}\rangle$$

- Bob a maintenant la paire EPR 12 dans un état $|B_{xy}\rangle$. Afin de déterminer les deux bits d'information classique qu'Alice a envoyé il doit décider quel est l'état de Bell dont il dispose. Comme Bob sait qu'il possède l'un des quatre états de Bell dans son laboratoire, il peut faire une mesure locale dans la base de Bell, et accéder aux informations xy .

Expériences. La téléportation et le codage superdense ont été réalisés expérimentalement. Un résumé du sujet peut être trouvé dans "Les dossiers de la Recherche" no 18, Février 2005 "L' étrange Pouvoir de l' intrication quantique", par N. Gisin .