Discrete Structures EPFL, Fall 2014/2015

# Final Exam – Question Sheet

Date: 14.01.2015 — 2:00pm-5:00pm

**Rules and Advice:**

- This exam is closed book. No electronic items are allowed. Place all your personal items on the floor. Leave only a pen and your ID on the desk. If you need extra scratch paper, please ask for it by raising your hand.
- Please do not cheat. We will be forced to report any such occurrence to the president of EPFL. This is not how you want to meet him. :-(
- It is not necessarily expected that you solve all problems. Don't get stuck. Start with the problems which seem the easiest to you and try to collect as many points as you can.
- For each of the following multiple-choice questions there is exactly one correct answer. Mark your answer on the **answer sheet**. The answer sheet is the only thing we will grade. No points will be subtracted for wrong answers.
- You are also asked to provide three proofs. Write your proofs also on the **answer sheet**. One more time: only solutions on the answer sheet count. You can answer in **Français**, **Deutsch**, **English**, **Italiano**, and **فارسی**.
- The exam starts at 2pm and lasts till 5pm.
- If a question is not completely clear to you, don't waste time and ask us for clarification right away.

**Règles:**

- *Cet examen se déroulera à livre fermé. Aucun appareil électronique n'est autorisé. Déposez toutes vos affaires personnelles sur le sol. Gardez seulement un stylo et votre carte CAMIPRO sur le pupitre. Si vous avez besoin de feuille de brouillon, demandez-en en levant la main.*
- *S'il vous plait, ne trichez pas. Nous serions obligés de rapporter n'importe qu'elle infraction au président de l'EPFL. Ce n'est certainement pas de cette façon que vous souhaitez le rencontrer :-(*
- *L'examen débute à 14:00 précise et se termine à 17:00.*
- *Pour chaque question à choix multiples, il y a exactement une réponse correcte. Indiquez votre réponse sur la feuille de réponses. Seule, cette feuille de réponses sera notée. Aucun point ne sera soustrait pour les mauvaises réponses.*
- *Il vous sera aussi demandé de produire trois preuves. Écrivez-les aussi sur la feuille de réponses uniquement. Une fois de plus : seules les réponses sur cette feuille seront prises en compte. Vous pouvez répondre en* **Français**, **Deutsch**, **English**, **Italiano**, *et* **فارسی**.
- *Si une question n'est pas entièrement claire pour vous, ne perdez pas de temps et demandez-nous immédiatement une explication supplémentaire.*
- *Il n'est pas forcément attendu que vous résolviez tous les problèmes. Ne restez pas bloqués! Commencez par les problèmes qui vous paraissent les plus simples et essayez d'obtenir le plus de points possibles.*

MULTIPLE-CHOICE QUESTIONS – mark your answers on the answer sheet [*QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES – marquez vos réponses sur la feuille de réponses*]

**1.** Separate the following compound proposition into logically equivalent groups. [*Séparez les propositions suivantes logiquement équivalentes en groupes.*] **[10pts]**

(a) $q \to \neg p$.

(b) $(p \vee q) \to (\neg p \wedge q)$.

(c) $(p \oplus q) \vee \neg p$.

(d) $q \vee (\neg q \vee p) \vee \neg p$.

(e) $q \to (p \vee q)$.

(f) $\neg p \vee (q \wedge \neg q)$.

**A.** (a)≡(b) ∧ (c)≡ (d) ∧ (e) ≡ (f)
**B.** (a)≡(b) ∧ (c)≡ (e) ∧ (d) ≡ (f)
**C.** (a)≡(b) ∧ (c)≡ (f) ∧ (d) ≡ (e)
**D.** (a)≡(c) ∧ (b)≡ (d) ∧ (e) ≡ (f)
**E.** (a)≡(c) ∧ (b)≡ (e) ∧ (d) ≡ (f)
**F.** (a)≡(c) ∧ (b)≡ (f) ∧ (d) ≡ (e)
**G.** (a)≡(d) ∧ (b)≡ (c) ∧ (e) ≡ (f)
**H.** (a)≡(d) ∧ (b)≡ (e) ∧ (c) ≡ (f)
**I.** (a)≡(d) ∧ (b)≡ (f) ∧ (c) ≡ (e)
**J.** (a)≡(e) ∧ (b)≡ (c) ∧ (d) ≡ (f)
**K.** (a)≡(e) ∧ (b)≡ (d) ∧ (c) ≡ (f)
**L.** (a)≡(e) ∧ (b)≡ (f) ∧ (c) ≡ (e)
**M.** (a)≡(f) ∧ (b)≡ (c) ∧ (d) ≡ (e)
**N.** (a)≡(f) ∧ (b)≡ (d) ∧ (c) ≡ (e)
**O.** (a)≡(f) ∧ (b)≡ (e) ∧ (c) ≡ (d)

*Solution.* Here is the truth tables of the propositions

| $p$ | $q$ | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) | (f) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $F$ |
| $T$ | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |

Hence, (a) and (c) are equivalent, (b) and (f) are equivalent, and finally (d) and (e) are equivalent.

**2.** Pick any sequence $(F_0, F_1, F_2, F_3, \cdots)$ and let $F(x)$ be the generating function corresponding to this sequence. For each of the following generating functions $G(x)$, what is the corresponding sequence? [*Prenez une séquence* $(F_0, F_1, F_2, F_3, \cdots)$ *et soit* $F(x)$ *la fonction génératrice correspondant à cette séquence. Pour chacune des fonctions génératrices suivantes* $G(x)$*, quelle est la séquence correspondante?*] **[6 x 2pts]**

(i) $G(x) = F(x^2)$

(ii) $G(x) = xF(x)$

(iii) $G(x) = F'(x)$, where $F'(x)$ denotes the derivative of $F(x)$

(iv) $G(x) = \dfrac{F(x)}{1-x}$

(v) $G(x) = \dfrac{F(x) + F(-x)}{2}$

(vi) $G(x) = \dfrac{1}{F(x)}$

**A.** $(0, 0, F_0, F_1, F_2, F_3, \cdots)$

**B.** $(F_0, 0, F_1, 0, F_2, 0, F_3, \cdots)$

**C.** $(F_0, F_0 + F_1, F_0 + F_1 + F_2, F_0 + F_1 + F_2 + F_3, \cdots)$

**D.** $(F_0', F_1', F_2', F_3', \cdots)$

**E.** $(\frac{1}{F_0}, \frac{F_0}{F_1}, \frac{F_1}{F_2}, \cdots)$

**F.** $(0, F_1, 2F_2, 3F_3, \cdots)$

**G.** $(F_0^2, F_1^2, F_2^2, F_3^2, \cdots)$

**H.** $(\frac{1}{F_0}, -\frac{F_1}{F_0}, \frac{F_1 - F_0F_2}{F_0}, \cdots)$

**I.** $(\frac{1}{F_0}, -\frac{F_1}{F_0^2}, \frac{F_1^2 - F_0F_2}{F_0^3}, \cdots)$

**J.** $(F_0, 0, F_2, 0, F_4, \cdots)$

**K.** $(xF_0, xF_1, xF_2, xF_3, \cdots)$

**L.** $(\frac{1}{F_0}, \frac{1}{F_1}, \frac{1}{F_2}, \cdots)$

**M.** $(0, F_0, F_1, F_2, F_3, \cdots)$

**N.** $(1, F_1, 2, F_2, 3, F_3, \cdots)$

**O.** $(1F_1, 2F_2, 3F_3, \cdots)$

*Solution.*

(i) $(F_0, 0, F_1, 0, F_2, 0, F_3, \cdots)$;

(ii) $(0, F_0, F_1, F_2, F_3, \cdots)$;

(iii) $(1F_1, 2F_2, 3F_3, \cdots)$;

(iv) $(F_0, F_0 + F_1, F_0 + F_1 + F_2, F_0 + F_1 + F_2 + F_3, \cdots)$;

(v) $(F_0, 0, F_2, 0, F_4, \cdots)$;

(vi) $(\frac{1}{F_0}, -\frac{F_1}{F_0^2}, \frac{F_1^2 - F_0 F_2}{F_0^3}, \cdots);$

**3.** **[2 x 4pts]**

(i) The remainder of the division of $11^{169}$ by 13 is equal to [*Le reste de la division de* $11^{169}$ *par* 13 *vaut*]

(ii) The remainder of the division of $3^{169}$ by 13 is equal to [*Le reste de la division de* $3^{169}$ *par* 13 *vaut*]

**A.** 0
**B.** 1
**C.** 2
**D.** 3
**E.** 4
**F.** 5
**G.** 6
**H.** 7
**I.** 8
**J.** 9
**K.** 10
**L.** 11
**M.** 12

*Solution.*

(i) The correct answer is 11. Recall that $a^p = a \bmod p$ by Fermat's Little Theorem. Hence, $a^{(p^2)} = (a^p)^p = a^p = a \bmod p$. Setting $a = 11$ and $p = 13$ gives us the answer.

(ii) The correct answer is 3. You can argue as in part (i) or simply observe that since $3^3 = 1 \bmod 13$ and $169 = 3 \cdot 56 + 1$.

**4.** There are $n$ pigeons, where $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Out of these $n$ pigeons, $k$ are *smart* and know about the pigeonhole principle, where $k < n/2$. The remaining $n-k$ pigeons are *not-so-smart*. Each *smart* pigeon eats at least 6 worms and at most 10 worms, and each *not-so-smart* pigeon eats at most 4 worms (but might also eat no worm and remain hungry!). At least how many pigeons eat the same number of worms? (We are looking for the **best** lower bound.) [*Il y a n pigeons, ou $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sur ces n pigeons, k sont* intelligents *et ils connaissent le principe des tiroirs, où $k < n/2$. Les autres $n-k$ pigeons sont* pas si intelligents. *Chaque pigeon* intelligent *mange au moins* 6 *vers et au plus* 10 *vers, et chaque pigeon* pas si intelligent *mange au plus* 4 *vers (mais peut aussi ne pas manger de ver et rester affamé!). Combien de pigeons au moins mangent le même nombre de vers?*] **[10pts]**

**A.** $\left\lfloor \dfrac{n-k}{4} \right\rfloor$

**B.** $\left\lfloor \dfrac{k}{4} \right\rfloor$

**C.** $\left\lceil \dfrac{n-k}{5} \right\rceil$

**D.** $\left\lceil \dfrac{k}{5} \right\rceil$

**E.** $\left\lceil \dfrac{k(n-k)}{5} \right\rceil$

*Solution.* The number of worms a *not-so-smart* pigeon eats is in the set $S_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Hence, by the pigeonhole principle, at least $\left\lceil \dfrac{n-k}{5} \right\rceil$ *not-so-smart* pigeons eat the same number of worms. Similarly, the number of worms a *smart* pigeon eats is in the set $S_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Hence, by pigeonhole principle, at least $\left\lceil \dfrac{k}{5} \right\rceil$ *smart* pigeons eat the same number of worms. Since $S_1$ and $S_2$ are disjoint, it is not possible that a *not-so-smart* pigeon and a *smart* pigeon eat the same number of worms. Hence, at least $\max\left(\left\lceil \dfrac{n-k}{5} \right\rceil, \left\lceil \dfrac{k}{5} \right\rceil\right)$ pigeons eat the same number of worms. Since $k < n/2$, the solution is $\left\lceil \dfrac{n-k}{5} \right\rceil$.

**5.** You are taking the DS exam and are asked to order $k$ functions $f_1(n), f_2(n), \cdots, f_k(n)$ by growth rate in increasing order. Unfortunately, this is not your favorite topic. [*Vous passez l'examen DS et vous êtes invités à ordonner k fonctions $f_1(n), f_2(n), \cdots, f_k(n)$ par leur taux de croissance dans l'ordre croissant. Malheureusement, ce n'est pas votre sujet favori.*] **[3 x 4pts]**

(i) Assume at first that you know that $f_1(n) < f_2(n) < f_3(n)$ and that you pick the answer uniformly at random from all possible answers which fulfill the above constraint. What is the chance that you get the order exactly right? [*Supposons d'abord que vous savez que $f_1(n) < f_2(n) < f_3(n)$ et que vous choisissez la réponse uniformément au hasard parmi toutes les réponses possibles qui satisfont la contrainte ci-dessus. Quelles sont les chances que vous obtenez l'ordre exact?*]

(ii) Assume next that you know the absolute positions of $f_1(n)$, $f_2(n)$, and $f_3(n)$ in this order but nothing else and that you pick the answer uniformly at random from all possible answers which fulfill the above constraint. What is the chance that you get the order exactly right? [*Supposons ensuite que vous connaissez les positions absolues de $f_1(n)$, $f_2(n)$, et $f_3(n)$ dans cet ordre, mais rien d'autre et que vous cherchez la réponse uniformément au hasard parmi toutes les réponses possibles qui satisfont la contrainte ci-dessus. Quelles sont les chances que vous obtenez l'ordre exact?*]

(iii) In which of these two scenarios ((i) or (ii)) do you have a better chance of guessing the right answer? (Choose J or K as your answer.) [*Dans lequel de ces deux scénarios ((i) ou (ii)), vous avez une meilleure chance de deviner la bonne réponse?* ]

**A.** $\frac{1}{10}$
**B.** $\frac{6}{k!}$
**C.** $\frac{3}{(k-3)!}$
**D.** $\frac{3}{k!}$
**E.** $\frac{1}{\binom{k}{3}}$
**F.** $\frac{1}{(k-3)!}$
**G.** $\frac{1}{3}$
**H.** $\frac{1}{3!}$
**I.** $\frac{1}{k!}$
**J.** (i)
**K.** (ii)

*Solution.* Assume that you only know the relative positions of these three elements. Let $P$ be the set of permutations on the $k$ elements $\{1, 2, \cdots, k\}$, where the three elements 1 and 2 and 3 are ordered so that 1 appears before 2, which appears before 3. We are interested in the cardinality of this set. Note that for each element in $P$ there are $3! = 6$ other permutations which we get from the given permutation by just permuting with in these three positions. Further, all these permutations are distinct. Hence, the cardinality of $P$ is equal to $k!/6$ and the probability is the inverse of this.
If on the other hand you know the exact positions of these three elements in the permutation then this is equivalent to choosing a permutation on $(k-3)$ elements and hence the probability is equal to $1/(k-3)!$.
The second one gives you a larger probability. We can see this from the formulas or simply conclude this since in the second case we have strictly more information.

**6.** Let $F_1(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ and $F_2(x) = \frac{1}{(x-b)^\beta}$ with $a \neq b$ and $a, b > 0$, and $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Define $H^+(x) = F_1(x)+F_2(x)$ (addition) and $H^\cdot(x) = F_1(x)\cdot F_2(x)$ (multiplication) and let $H_n^+$ and $H_n^\cdot$ denote the coefficients of the corresponding sequences when $H^+(x)$ and $H^\cdot(x)$ are interpreted as generating functions. Which of the following assertions is correct? [*Soient* $F_1(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ *et* $F_2(x) = \frac{1}{(x-b)^\beta}$ *avec* $a \neq b$ *et* $a, b > 0$, *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. *Soient* $H^+(x) = F_1(x) + F_2(x)$ *(addition) et* $H^\cdot(x) = F_1(x) \cdot F_2(x)$ *(multiplication) et dénotez par* $H_n^+$ *and* $H_n^\cdot$ *les coefficients des séquences correspondantes. Laquelle des affirmations suivantes est correcte?*] **[8pts]**

**A.** $H_n^+$ is $\Theta(H_n^\cdot)$
**B.** $H_n^+$ is $O(H_n^\cdot)$ but $H_n^+$ is not $\Omega(H_n^\cdot)$
**C.** $H_n^+$ is not $O(H_n^\cdot)$ but $H_n^+$ is $\Omega(H_n^\cdot)$

*Solution.* The first assertion is correct. As we have learned, the product can be represented as a sum of "simple" terms using the partial fraction decomposition and the growth rate of a sum is determined by that term in the sum that has the largest growth rate.

**7.** Given a set $S$, let $\mathcal{P}(S)$ denote the set of subsets of $S$. Also $S^n = \overbrace{S \times S \times \cdots \times S}^{n \text{ times}}$. For each of the following sets, mark the correct answer. [*Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{Q}$. Pour chacun des couples suivants, indiquez la réponse correcte.*] **[5 x 3 pts]**

**A.** $|A| = |B|$ **B.** $|A| > |B|$ **C.** $|A| < |B|$

i) $A = \mathbb{R}$
$B = \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$

ii) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
$B = \mathbb{N}$

iii) $A = \overbrace{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\cdots \mathcal{P}}^{4 \text{ times}}(\{7\})))$, i.e., we start from $\{7\}$ and apply 4 times $\mathcal{P}(\cdot)$
$B = \{7, \{7\}\}^4$

iv) $A = \{\text{functions } f : C \to D \mid C = \{0,1\}, D = \mathbb{N}\}$
$B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

v) $A = \{\text{functions } f : C \to D \mid C = \mathbb{N}, D = \{0,1\}\}$
$B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

*Solution.*

(i) $|A| = |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}| = |B|$

(ii) $|A| = |\mathbb{N}| = |B|$

(iii) $|A| = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} > 2^4 = |B|$

(iv) $|A| = |\mathbb{N}|^2 < |B|$

(v) $|A| = 2^{|\mathbb{N}|} = |B|$

**8.** In the following, $X$ and $Y$ are random variables defined on the same sample space $S$ and $E$ and $F$ are events. For each of the following statements indicate whether it is **T** or **F**. [*Dans ce qui suit, $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace des échantillon $S$ et $E$ et $F$ sont des événements. Pour chacun des énoncés suivants indiquez s'ils sont vrais (**T**) ou faux (**F**).* ] **[14 x 1pts]**

(i) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ always;

(ii) $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ always;

(iii) $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ if $X$ and $Y$ are independent;

(iv) $X$ and $Y$ are said to be independent if and only if $p(X = x \wedge Y = y) = p(X = x)p(Y = y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}$;

(v) $p(X = x) = \sum_y p(X = x|Y = y)$ is the law of total probability;

(vi) $p(X = x) = \sum_y p(X = x \wedge Y = y)$ is the law of total probability;

(vii) The mapping $X : S \to \mathbb{R}$ must be surjective;

(viii) The mapping $X : S \to \mathbb{R}$ must be injective;

(ix) The mapping $X : S \to \mathbb{R}$ must be bijective;

(x) The mean of the sum of $n$ Bernoulli trials with success probability $q$ is $nq(1-q)$;

(xi) The mean of of the sum of $n$ Bernoulli trials with success probability $q$ is $nq$;

(xii) $p(E|F) = p(E \cap F)$;

(xiii) $p(E|F) = \dfrac{p(E \cap F)}{p(E)p(F)}$;

(xiv) $p(E|F) = \dfrac{p(E \cap F)}{p(F)}$;

*Solution.*

(i) T;

(ii) F;

(iii) F;

(iv) T;

(v) F;

(vi) T;

(vii) F;

(viii) F;

(ix) F;

(x) F;

(xi) T;

(xii) F;

(xiii) F;

(xiv) T

**9.** For each of the following counting problems indicate the generating functions whose $k$-th coefficient, when expanded as a sequence, gives the correct answer. [*Pour chacun des problèmes de comptage suivants indiquez les fonctions génératrices dont le k-ième coefficient, lorsqu'elle est développée comme une séquence, donne la bonne réponse.*] **[5 x 3pts]**

(i) The number of subsets of size $k$ out of a set of size $n$. [*Le nombre de sous-ensembles de taille $k$ sur un ensemble de taille $n$.*]

(ii) The number of ways of representing $k$ CHFs in terms of 1 CHF coins, 2 CHFs coins, and 5 CHFs coins. [*Le nombre de façons de représenter $k$ CHFs en termes de 1 CHF, de 2 CHF et de 5 CHFs.*]

(iii) The number of ways of representing $k$ CHFs in terms of 1 CHF coins, 2 CHFs coins, and 5 CHFs coins, with at most 3 coins of domination 5 CHFs used. [*Le nombre de façons de représenter $k$ CHFs en termes de 1 CHF piéces de monnaie, 2 CHFs pièces de monnaie, et 5 CHFs piéces de monnaie, avec au plus 3 pièces de domination de 5 CHFs utilisées.*]

(iv) The number of ways of representing $k$ CHFs in terms of 1 CHF coins, 1 CHF stamps, and 1 CHF gift certificates. [*Le nombre de façons de représenter $k$ CHFs en termes de 1 CHF piéces de monnaie, 1 CHF timbres, et 1 CHF certificats-cadeaux.*]

(v) The number of strings of decimals of length $n$ that contain exactly $k$ "5"s. [*Le nombre de chaînes décimales de longueur $n$ qui contiennent exactement $k$ " 5".*]

**A.** $(1+x)^n$
**B.** $(3+x)^n$
**C.** $(5+x)^n$
**D.** $(7+x)^n$
**E.** $(9+x)^n$
**F.** $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$
**G.** $\dfrac{1\cdot 2\cdot 5}{(1-x)^1(1-x)^2(1-x)^5}$
**H.** $\dfrac{1+2x+5x^2}{(1-x)^1(1-x)^2(1-x)^5}$
**I.** $\dfrac{1+2x+5x^2}{(1-x)^8}$
**J.** $\dfrac{1}{(1-1x)(1-2x)(1-5x)}$
**K.** $\dfrac{1}{(1-x)^1(1-x)^2(1-x)^5}$
**L.** $\dfrac{1-x^{20}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$
**M.** $\dfrac{1+x^5+x^{10}+x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$
**N.** $\dfrac{1}{(1-x)^3}$
**O.** $\dfrac{1}{(1-x^3)}$
**P.** $\dfrac{1}{(1-3x)}$
**Q.** $\dfrac{3}{(1-x^3)}$

*Solution.*

(i) $(1+x)^n$;

(ii) $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$;

(iii) $\dfrac{1-x^{20}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$;

(iv) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$;

(v) $(9+x)^n$;

**10.** Determine the number of integers in $\{1, 2, 3, \cdots, 2015\}$ that are divisible by 6, 7, or 8. **[10pts]**
[*Calculez le nombre des entiers dans* $\{1, 2, 3, \cdots, 2015\}$ *qui sont divisibles par* 6, 7, *ou* 8. ]

**A.** 873
**B.** 708
**C.** 719
**D.** 335
**E.** 0

*Solution.* Let $A$, $B$, and $C$ be the sets of integers between 1 and 2015 which are divisible by 6, 7, and 8, respectively. Then,

$$\begin{aligned} |A| &= \left\lfloor \frac{2015}{6} \right\rfloor = 335, \\ |B| &= \left\lfloor \frac{2015}{7} \right\rfloor = 287, \\ |C| &= \left\lfloor \frac{2015}{8} \right\rfloor = 251, \\ |A \cap B| &= \left\lfloor \frac{2015}{42} \right\rfloor = 47, \\ |A \cap C| &= \left\lfloor \frac{2015}{24} \right\rfloor = 83, \\ |B \cap C| &= \left\lfloor \frac{2015}{56} \right\rfloor = 35, \\ |A \cap B \cap C| &= \left\lfloor \frac{2015}{168} \right\rfloor = 11. \end{aligned}$$

Hence, by inclusion-exclusion principle, we have that

$$|A \cup B \cup C| = 335 + 287 + 251 - 47 - 83 - 35 + 11 = 719.$$

PROBLEMS – write down the proofs on the answer sheet [*PROBLEMES – écrivez les preuves sur la feuille de réponse*]

**11.** Let $h_0(x) = x(1-x)$ and define $h_n(x) = h_{n-1}(x^2) + h_{n-1}(x(2-x))$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Prove that $h_n(x) = h_n(1-x)$ for $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ and $x \in [0,1]$. [*Soit $h_0(x) = x(1-x)$ et définissez $h_n(x) = h_{n-1}(x^2) + h_{n-1}(x(2-x))$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Montrez que $h_n(x) = h_n(1-x)$, avec $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ et $x \in [0,1]$.* ] **[20pts]**

*Solution.* Let $P(n) =$"$h_n(x) = h_n(1-x)$ for $x \in [0,1]$". Note that $P(0)$ has truth value **T** since $h_0(x) = x(1-x) = (1-x)x = h_0(1-x)$. Let us now prove the induction step, namely that $P(n) \to P(n+1)$. We have

$$\begin{aligned}
h_{n+1}(x) &= h_n(x^2) + h_n(x(2-x)) \\
&= h_n(x^2) + h_n(1-(1-x)^2) \\
&\overset{P(n)}{=} h_n(1-x^2) + h_n((1-x)^2) \\
&= h_n((1-x)^2) + h_n(1-x^2) \\
&= h_n((1-x)^2) + h_n((1-x)(1+x)) \\
&= h_{n+1}(1-x).
\end{aligned}$$

**12.** Let $X$ and $Y$ be random variables taking values in $\{0,1\}$. Let $p(X=0 \wedge Y=0) = p(X=1 \wedge Y=1) = \frac{1}{2}$ and $p(X=0 \wedge Y=1) = p(X=1 \wedge Y=0) = 0$. Prove or disprove that $X$ and $Y$ are independent. NOTE: $p(X=x \wedge Y=y)$ denotes the probability of the event that the random variable $X$ takes on the value $x$ AND the random variable $Y$ takes on the value $y$. **[20pts]**
[*Soient $X$ et $Y$ des variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$. Soient $p(X=0 \wedge Y=0) = p(X=1 \wedge Y=1) = \frac{1}{2}$ et $p(X=0 \wedge Y=1) = p(X=1 \wedge Y=0) = 0$. Prouvez ou réfutez que $X$ et $Y$ sont indépendants.*]

*Solution.* Note that $X$ and $Y$ are independent if $p(X=x \wedge Y=y) = p(X=x)p(Y=y)$ for all $x, y \in \{0,1\}$. By the law of total probability we have

$$p(X=0) = \sum_{y \in \{0,1\}} p(X=0 \wedge Y=y) = \frac{1}{2},$$
$$p(Y=0) = \sum_{x \in \{0,1\}} p(X=0 \wedge Y=y) = \frac{1}{2}.$$

Therefore

$$\frac{1}{2} = p(X=0 \wedge Y=0) \neq \frac{1}{4} = p(X=0)p(Y=0).$$

It follows that $X$ and $Y$ are not independent.

**13.** Let $a$ and $b$ be two non-negative natural numbers. You want to multiply these two numbers but only know how to **[20pts]**

(i) add two integer numbers

(ii) compute `floor(x/2)`, i.e., divide a natural number by 2 and take the floor function

(iii) check if a number is even

Write down a recursive function `multiply (a, b)` that takes as input two non-negative natural numbers $a$ and $b$ and returns the multiplication $a$ and $b$ using only the above operations. You can assume $a \leq b$. Make the function as efficient as possible. What is the complexity of this algorithm when measured in the number of additions that are used? [*Soient a et b deux nombres naturels non-négatifs. Vous voulez multiplier ces deux nombres, mais vous savez seulement comment (i) ajouter deux numéros entièrs, (ii) calculer* `floor(x/2)`*, ce est à dire, la façon de diviser un nombre naturel par* 2 *et de prendre la fonction partie entière, et (iii) le façon de vérifier si un nombre est pair. Ecrire une fonction récursive* `mupltiply (a, b)` *qui prend comme entrées deux nombres naturels non négatifs a et b et retourne la multiplication de a et b en utilisant uniquement les opérations ci-dessus. Vous pouvez supposer* $a \leq b$. *Assurez-vous que la fonction est aussi efficace que possible. Quelle est la complexité de cet algorithme lorsqu'elle est mesurée dans le numéro de l'additions qui sont utilisés?* ]

*Solution.* Here is a possible implementation. The complexity is $\Theta(\log(\min(a, b)))$. Let us assume without loss of generality that $a < b$. If not, we only need to swap the roles of $a$ and $b$.

```
Data: multiply(a, b)
Result: the multiplication of a and b
if a==0 then
  | return 0;
else
  | ah=floor(a/2);
  | rh=multiply(ah, b);
  | r=rh+rh;
  | if a is even then
  |   | return r;
  | else
  |   | return r+b;
  | end
end
```