Série 5
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Niveaux d'énergies d'un moment magnétique dans un champ magnétique constant*

L'observable "energie", aussi appelée "hamiltonien" d'un moment magnétique (spin 1/2) dans un champ magnétique est donné par

$$H = -\gamma\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$$

où $\vec{\sigma}$ est le vecteur dont les trois composantes sont les matrices de Pauli.

1. Ecrire explicitement la matrice 2×2, calculer les valeurs propres et les vecteurs propres. Ces valeurs propres sont les deux niveaux d'énergie et les vecteurs propres les deux états propres correspondants. Ecrire les vecteurs propres en notation de Dirac, et représentez les sur la sphère de Bloch.
2. Voyez vous un moyen d'obtenir les résultats précédents sans faire de calculs ?!
3. Supposons que le moment magnétique est initialement dans l'état excité (le niveau d'énergie supérieur) et émet spontanément un photon. Quel est l'énergie finale du moment magnétique, et quelle est la fréquence du photon émis ?

Exercice 2 *Appareil de Stern et Gerlach*

On considère un four qui émet N moments magnétiques. Le nombre de moments magnétiques émis dans l'état

$$\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle$$

est $Np(\theta,\phi)\sin\theta d(\cos\theta)d\phi$ pour une certaine densité de probabilité $p(\theta,\phi)$. Notez que $d(\cos\theta)d\phi$ est l'élément de surface sur la sphère ; $0\le\theta\le\pi$, $0\le\phi\le 2\pi$.

Les moments magnétiques passent à travers un appareil de Stern-Gerlach avec un champ magnétique (inhomogène) orienté le long de l'axe z. On observe deux taches (sur un écran) correspondant aux états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$.

1. Quel est le nombre de moments magnétiques qui participe à la création de chacune des taches quand $p(\theta,\phi)=\frac{1}{4\pi}$ (distribution uniforme sur la sphère) ?
2. Même question quand $p(\theta,\phi)=\frac{1}{2\pi}$ pour $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ (hémisphère supérieur) et $p(\theta,\phi)=0$ pour $\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi$ (hémisphère inférieur).

Exercice 3 *"Dynamique" probabiliste versus quantique*

Une matrice P est dite stochastique si $0 \leq P_{kl} \leq 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} P_{kl} = 1$. Ici P_{kl} représente une probabilité de transition $l \to k$.

Soit U une matrice unitaire $n \times n$ et $|0\rangle$, $|1\rangle$, ..., $|n-1\rangle$ une base orthonormée.

1. Montrez que $|\langle j| U |i\rangle|^2 = R_{ji}$ est une matrice stochastique. Notez que R_{ji} représente une probabilité d'observer la transition $|i\rangle \to |j\rangle$ (postulat de la mesure) si on fait la mesure dans la base $|0\rangle$, $|1\rangle$, ..., $|n-1\rangle$.
2. On considère le processus de calcul stochastique classique donné par la figure 1.

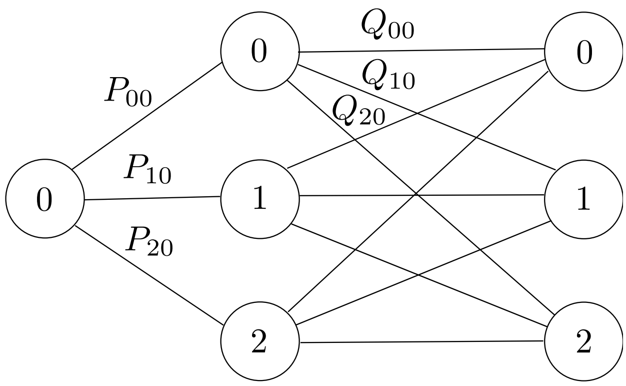

Fig. 1 – processus classique

On initialise le registre d'entrée dans l'état 0. Lors de la première étape, l'état transite vers 0, 1, 2 avec probabilité P_{j0}. Lors de la deuxième étape, l'état transite vers 0, 1, 2 avec probabilité Q_{kj}. Calculez la probabilité d'observer l'état 2 à la sortie.

3. On considère l'analogue quantique : voir figure 2. Ici le registre peut être dans 3 états quantiques $|0\rangle$, $|1\rangle$ et $|2\rangle$. La première étape de calcul est décrite par une matrice d'évolution unitaire U_1 et la deuxième étape par U_2. On suppose que $|\langle j| U_1 |i\rangle|^2 = P_{ji}$ et $|\langle j| U_2 |i\rangle|^2 = Q_{ji}$.

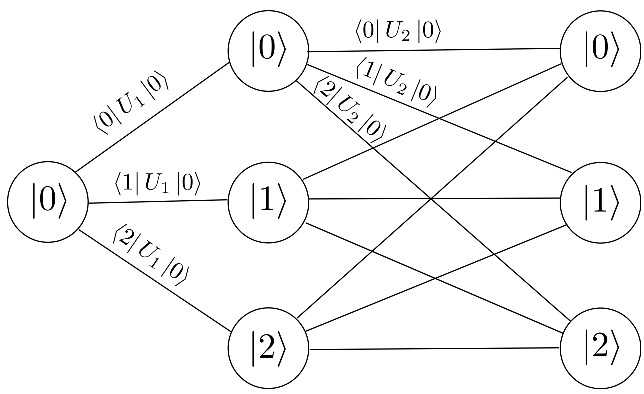

Fig. 2 – processus quantique

– Calculez la probabilité d'observer l'état $|2\rangle$ à la sortie si l'état d'entrée est $|0\rangle$. Comparez le résultat avec le cas classique.
– Supposons que l'on fasse une mesure intermédiaire après la première étape. Quelle est la probabilité d'observer l'état final $|2\rangle$ à la sortie, si l'état initial est $|0\rangle$. Y-a-t'il une différence avec le cas classique ?