Test Intermédiaire, Bachelor 3ème année
Traitement Quantique de l'Information

NOM :
PRENOM :

- Vous avez 2h45 : 8h15 - 11h00.
- Il y a 5 exercices. Lisez les tous avant de commencer dans l'ordre qui vous convient le mieux.
- Justifiez vos réponses et détaillez vos calculs.
- L'usage d'appareils électroniques est interdit.
- Chaque problème possède le même poids.

Conventions

- Le nombre imaginaire pur sera noté i (c.a.d. $i^2 = -1$).
- Par convention $|0\rangle$, $|\uparrow\rangle$ ou $|h\rangle$ sont égals à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Et $|1\rangle$, $|\downarrow\rangle$ ou $|v\rangle$ sont égals à $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les formules suivantes peuvent <u>éventuellement</u> être utiles :

a) On rappelle les formules d'Euler pour θ un nombre réel.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

et

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \ \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

b) Les trois matrices de Pauli sont

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice identité est notée $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ est un vecteur unité et $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ on a

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z.$$

De plus la formule d'Euler généralisée est valable (t un nombre réel)

$$e^{it\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = (\cos t)I + i(\sin t)\vec{n} \cdot \vec{\sigma}.$$

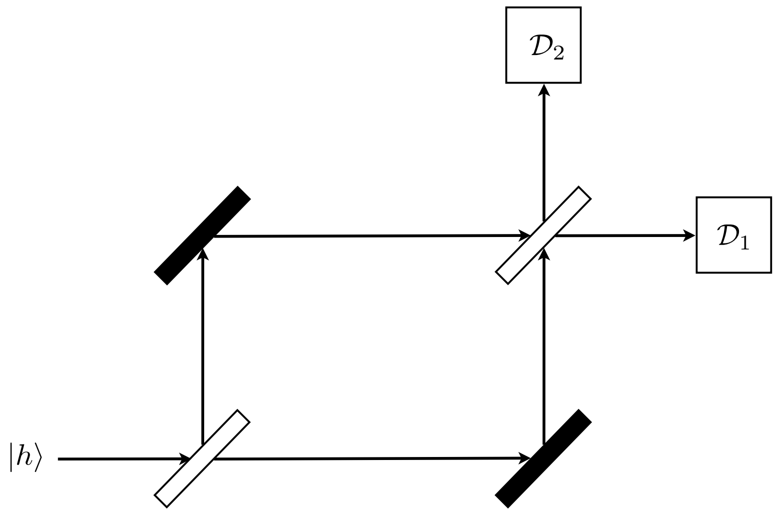
c) Si A est une matrice hermitienne, $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ses valeurs propres et $|\phi_1\rangle$,...,$|\phi_n\rangle$ les vecteurs propres correspondants, on a la décomposition spectrale

$$A = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|.$$

Exercice 1 *Interféromètre de Mach-Zehnder.*

Considérez l'interféromètre de Mach-Zehnder de la figure ci-dessous. On suppose qu'un photon est envoyé sur le mirroir semi-transparent à gauche. Ensuite celui-ci est réfléchi par deux miroirs réfléchissants, puis arrive sur le miroir semi-tranparent à droite. Il est finalement capturé dans les détecteurs D_1 et/ou D_2.

L'espace d'Hilbert du photon est modélisé par l'espace bidimensionnel $\mathbf{C}^2$ de base canonique $|h\rangle$, $|v\rangle$, correspondant aux trajectoires "horizontales" et "verticales" du photon. Les mirroirs semi-transparents sont modélisés par la matrice de Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Les mirroirs réfléchissants sont modélisés par la matrice $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.



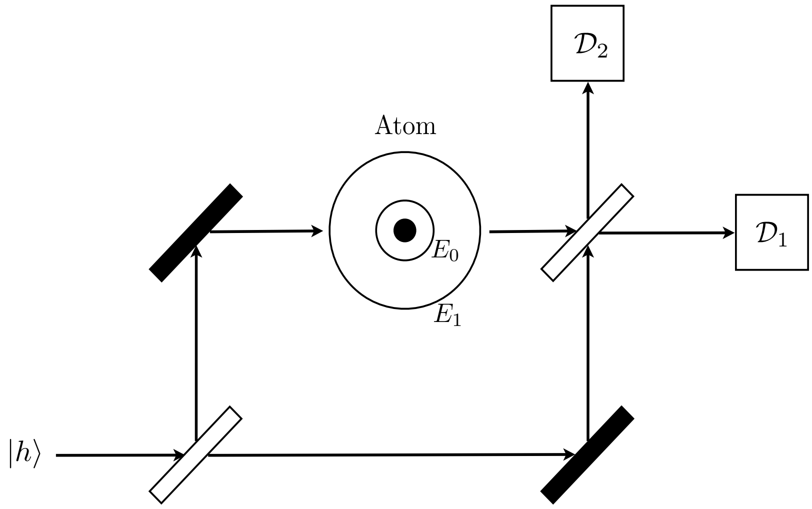
(a) L'état initial du photon est $|h\rangle$. Calculez les probabilités que le photon soit détecté dans D_1, dans D_2.

On considère maintenant la situation où un atome, avec deux niveaux d'énergie $E_1 > E_0$, est placé sur un des chemins possibles de l'interféromètre, comme sur la figure ci-desous. Cette fois on veut tenir compte du fait que le photon pourrait être absorbé par l'atome.

(b) Quelle est la condition sur la fréquence du photon pour que celui-ci puisse être absorbé par l'atome ?

L'espace de Hilbert du photon est maintenant modélisé par un espace à trois dimensions dont les états de base orthonormés sont

$$|h\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |v\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\mathrm{abs}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Les mirroirs semi-transparents agissent comme $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les mirroirs réfléchissants sont modélisés par la matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le processus d'absorption du photon par l'atome agit comme $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Calculez $M|h\rangle, M|v\rangle, M|\mathrm{abs}\rangle$ pour $M = S, R, P$. Faites le calcul comme vous voulez mais, <u>donnez les résultats en notation de Dirac</u>.

(d) L'état initial du photon est $|h\rangle$. Calculez l'état du photon à la sortie du second miroir semi-transparent. Puis calculez les probabilités que le photon soit détecté dans D_1, dans D_2 et pas du tout détecté (c.a.d absorbé par l'atome).
<u>Faites les calculs en notation de Dirac</u>.

(e) On pourrait considérer d'autres modèles pour l'interaction entre le photon et l'atome, auquel cas il faudrait remplacer la matrice P. Laquelle de ces deux matrices serait légitime, c.a.d compatibles avec les principes de la mécanique quantique : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$?
Justifiez ! (pas de longs calculs).

Exercice 2 *Valeur moyenne d'une observable.*

Soit une observable représentée par une matrice A. Celle-ci possède des valeurs propres α_j et vecteurs propres $|\phi_j\rangle$, c.a.d $A|\phi_j\rangle = \alpha_j|\phi_j\rangle$.

(a) Laquelle de ces deux identités doit être nécessairement vérifiée : $A = A^{T,*}$ ou $AA^{T,*} = I$? (Ici ^{T,*} dénote l'opération de transposition et conjugaison complexe).

(b) Soit $|\Psi\rangle$ l'état d'un système. On mesure l'observable A pour ce système. Quelle est la base orthonormée qui modélise l'appareil de mesure ? Quels sont les états possibles après la mesure ? Et quelles sont les valeurs possibles de l'observable ? Quelles sont les probabilités associées ?

(c) Démontrez que la valeur moyenne des valeurs possibles de l'observable après la mesure est $\langle\Psi|A|\Psi\rangle$.

(d) Démontrez que la variance des valeurs possibles de l'observable après la mesure est $\langle\Psi|A^2|\Psi\rangle - \langle\Psi|A|\Psi\rangle^2$.

Exercice 3 *Représentations sur la sphère de Bloch.*

On rappelle qu'un bit quantique

$$\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle$$

est représenté par le vecteur pointant dans la direction (θ, ϕ) en coordonnées sphériques sur une sphère (appelée dans ce contexte sphère de Bloch).

Calculez et représentez sur la sphère de Bloch les qubits suivants (dessinez une sphère avec les axes x, y, z pour chaque question **(a)-(d)**)

(a) $|\uparrow\rangle$ et $e^{i\theta\sigma_z}|\uparrow\rangle$.

(b) $|\uparrow\rangle$ et $e^{i\theta\sigma_x}|\uparrow\rangle$.

(c) $\frac{|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$ et $e^{i\theta\sigma_z}(\frac{|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle}{\sqrt{2}})$.

(d) Supposons que la variable t représente le temps et a un nombre réel positif. Représentez la trajectoire du vecteur

$$e^{ita\sigma_z}(\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle)$$

sur la sphère de Bloch. Cette trajectoire est-elle périodique ? Si oui, quelle est sa période ?

Exercice 4 *Billets de banque quantiques.*

En 1970 S. Wiesner eut l'idée des billets de banque quantiques (ou plutôt chèques quantiques).

La banque génère N ($N = 100$ par exemple) photons piégés dans N cavités insérées dans un "billet". Chaque photon est préparé *uniformément aléatoirement* dans un des 4 états de polarisation $|p_i\rangle$ avec $p_i = 0, 1, +, -$. En d'autres termes les 4 états possibles de chaque photon sont :

$$|0\rangle,\ |1\rangle,\ |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),\ \text{et } |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

La banque édite sur le billet un numéro de série S. Le numero S est public, mais seule la banque connait la correspondance $S \leftrightarrow p_1, \cdots, p_N$.

(a) Une personne honnête apporte à la banque un vrai billet quantique pour encaisser de la monnaie classique. La banque doit procéder à une vérification (à partir du numéro de série) sans détruire le billet. C'est à dire que la banque doit vérifier que les photons sont dans le bon état, mais sans détruire cet état. Expliquez en quelques mots comment la banque procède et en particulier comment sont modélisés les appareils de mesure utilisés par la banque.

(b) Un malfaiteur peut-il copier le billet de banque avec une seule "machine unitaire" ? Justifiez.

(c) Un malfaiteur prépare un faux billet. Vu qu'il ne connait la vrai séquence des états des photons, il les prépare uniformément aléatoirement dans les 4 états possibles $|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle$. Ensuite il imprime sur le faux billet le numero de série S d'un vrai billet. Il y a donc $N/4$ "bons photons" dans un état identique à celui du vrai billet, et $3N/4$ "mauvais photons" dans un état différent de celui du vrai billet. Il apporte le faux billet à la banque pour l'échanger contre de la monnaie classique. La banque procède à une vérification grâce au numéro de série S (comme si la personne apportant le billet était honnête, voir **(a)**). Elle va trouver une certaine proportion de photons dans le mauvais état. Calculez cette proportion.

Exercice 5 *Codage superdense avec des paires EPR imparfaites.*

Alice est dans la Station Spatiale et Bob sur la Terre. Ils partagent une paire de photons dans l'état

$$|B_\theta\rangle = \cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle, \qquad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Alice possède le premier photon et Bob le second.

(a) Montrez que la paire est intriqué si et seulement si $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$.

(b) Pour envoyer un message $xy = 00, 01, 10, 11$ à Bob, Alice utilise le protocole usuel du codage superdense (car θ est inconnu). En d'autres termes pour envoyer 00 elle envoie tout simplement *son* photon à Bob ; pour envoyer 01 elle effectue l'opération unitaire σ_x sur *son* photon puis l'envoie à Bob ; pour envoyer 10 elle effectue l'opération unitaire σ_z sur *son* photon puis l'envoie à Bob ; pour envoyer 11 elle effectue l'opération unitaire $i\sigma_y$ sur *son* photon puis l'envoie à Bob. Calculez les 4 états possibles de la paire quand Bob recoit le photon d'Alice.

(c) Supposons concrètement qu'Alice désire envoyer le message 00. Lorsque Bob possède les deux photons de la paire, il utilise le protocole usuel du codage superdense (car θ est inconnu). Il effectue donc une mesure dans la base de Bell. Cette base est constituée des 4 états

$$\begin{aligned}
|B_{00}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \\
|B_{01}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \\
|B_{10}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \\
|B_{11}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle.
\end{aligned}$$

Quels sont les messages possibles observés par Bob et quelles sont leurs probabilités ? Pour quel $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ la probabilité d'erreur de transmission est-elle minimale ? Maximale ?