Solution de la série 11
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1

Bit-flip :

$$\rho^{'} = (1-p)\rho + pX\rho X$$

Prenons $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{N}\cdot\vec{\sigma})$. Alors

$$\rho^{'} = \frac{1-p}{2}(I + \vec{N}\cdot\vec{\sigma}) + \frac{p}{2}(X^2 + X\vec{N}\cdot\vec{\sigma}X).$$

Puisque $X^2 = I$ et $XYX = -X^2Y = -Y$, $XZX = -Z$ et $XXX = X$ on obtient

$$\begin{aligned}\rho^{'} =& \frac{1-p}{2}(I + n_xX + n_yY + n_zZ) + \frac{p}{2}(I + n_xX - n_yY - n_zZ)\\ =& \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}n_xX + \frac{1-2p}{2}n_yY + \frac{1-2p}{2}n_zZ\end{aligned}$$

L'application sur la sphère de Bloch est donc

$$\vec{N} = (n_x, n_y, n_z) \to \vec{N}' = (n_x, (1-2p)n_y, (1-2p)n_z)$$

Pour $0 < p < \frac{1}{2}$ cela correspond à une contraction du plan yz, l'axe x restant inchangé. La surface de la sphère devient un ellipsoïde d'axes $(1, \sqrt{1-2p}, \sqrt{1-2p})$. (Voir dessins de Nielsen et Chuang).

Phase-flip :

$$\begin{aligned}\rho^{'} =& (1-p)\rho + pZ\rho Z\\ =& \frac{1-p}{2}(I + \vec{N}\cdot\vec{\sigma}) + \frac{p}{2}(X^2 + Z\vec{N}\cdot\vec{\sigma}Z)\\ =& \frac{1}{2}I + \frac{1-2p}{2}n_xX + \frac{1-2p}{2}n_yY + \frac{1}{2}n_zZ\end{aligned}$$

$$\vec{N} = (n_x, n_y, n_z) \to \vec{N}' = ((1-2p)n_x, (1-2p)n_y, n_z)$$

On trouve que n_z est inchangé et le plan xy est contracté.

Phase & bit flip :

$$\rho^{'} = (1-p)\rho + pY\rho Y$$

On trouve après calculs similaires :

$$\vec{N} = (n_x, n_y, n_z) \to \vec{N'} = ((1-2p)n_x, n_y, (1-2p)n_z)$$

Canal dépolarisant :

$$\begin{aligned}
\rho^{'} =& (1-p)\rho + p\frac{I}{2} \\
=& \frac{1-p}{2}(I + \vec{N}\cdot\vec{\sigma}) + p\frac{I}{2} \\
=& \frac{I}{2} + \frac{1-p}{2}\vec{N}\cdot\vec{\sigma} \\
=& \frac{1}{2}(I + (1-p)\vec{N}\cdot\vec{\sigma})
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \vec{N} = (n_x, n_y, n_z) \to \vec{N'} = ((1-p)n_x, (1-p)n_y, (1-p)n_z)$$

Le rayon de la sphère de Bloch est contracté de $\sqrt{1-p}$.

Exercice 2

a) Pour toutes matrices densités ρ :

$$\begin{aligned}
\frac{\rho + X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z}{4} =& \frac{1}{4}\Big(\frac{I}{2} + \vec{N}\cdot\vec{\sigma} + X\frac{I}{2}X + X\vec{N}\cdot\vec{\sigma}X \\
& + Y\frac{I}{2}Y + Y\vec{N}\cdot\vec{\sigma}Y + Z\frac{I}{2}Z + Z\vec{N}\cdot\vec{\sigma}Z\Big) \\
=& \frac{1}{4}(2I + n_xX + n_yY + n_zZ + n_xX - n_yY - n_zZ \\
& - n_xX + n_yY - n_zZ - n_xX - n_yY + n_zZ) \\
=& \frac{I}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\rho) =& p\frac{I}{2} + (1-p)\rho \\
=& p\frac{\rho + X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z}{4} + (1-p)\rho \\
=& \left(1 - \frac{3p}{4}\right)\rho + \frac{p}{4}(X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z)
\end{aligned}$$

En changeant de parametrisation $p = \frac{4}{3}p^{'}$ on obtient

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p')\rho + \frac{p'}{3}(X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z).$$