

Solutions Série 5 Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Variation sur le problème de Simon*

a) On a $(0, \vec{x}') + (0, \vec{x}'') = (0, \vec{x}' + \vec{x}'') \in H$ et $(0, 0, \dots, 0) \in H$. Les deux propriétés entraînent que H est un sous-groupe de \mathbb{F}_3^n . La cardinalité est $|H| = 3^{n-1}$. D'après le théorème de Lagrange il y a $|\mathbb{F}_3^n/H| = \frac{|\mathbb{F}_3^n|}{|H|} = \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3$ classes d'équivalence.

b)

$$U_f |\psi_{in}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in \mathbb{F}_3^n} |\vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{x})\rangle.$$

Puisque f est constante sur les classes d'équivalence on peut écrire

$$\mathbb{F}_3^n = \{\vec{a} + \vec{x}, \vec{x} \in H\} \cup \{\vec{b} + \vec{x}, \vec{x} \in H\} \cup \{\vec{c} + \vec{x}, \vec{x} \in H\}$$

$$\begin{aligned} U_f |\psi_{in}\rangle &= \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in H} \{ |\vec{a} + \vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{a})\rangle + |\vec{b} + \vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{b})\rangle + |\vec{c} + \vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{c})\rangle \} \\ &= \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in H} \{ |\vec{a} + \vec{x}\rangle \otimes |0\rangle + |\vec{b} + \vec{x}\rangle \otimes |1\rangle + |\vec{c} + \vec{x}\rangle \otimes |2\rangle \} \end{aligned}$$

c) On a :

$$\begin{aligned} (F \otimes \mathbb{I}) U_f |\psi_{in}\rangle &= \frac{1}{3^{n/2}} \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in H} \sum_{\vec{y} \in \mathbb{F}_3^n} e^{\frac{2\pi i}{3}(\vec{a} + \vec{x})\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |0\rangle \\ &\quad + e^{\frac{2\pi i}{3}(\vec{b} + \vec{x})\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}(\vec{c} + \vec{x})\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |2\rangle \end{aligned}$$

Grâce à l'indication :

$$\begin{aligned} (F \otimes \mathbb{I}) U_f |\psi_{in}\rangle &= \frac{1}{3} \sum_{\vec{y} \in H^\perp} e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |2\rangle \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\vec{y} \in H^\perp} |\vec{y}\rangle \otimes \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}} |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}} |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}} |2\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{y_1=0,1,2} |y_1, 0, \dots, 0\rangle \otimes \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}} |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}} |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}} |2\rangle \right\} \\ &\equiv |\psi_{fin}\rangle \end{aligned}$$

d) D'après le postulat de la mesure, après la mesure l'état devient (0 si $\vec{y} \neq (y_1, 0, \dots, 0)$)

$$(\mathbb{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I})|\psi_{fin}\rangle = \frac{1}{3}|y_1, 0, \dots, 0\rangle \otimes \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}a\vec{y}}|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}b\vec{y}}|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}c\vec{y}}|2\rangle \right\}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \langle \psi_{fin} | \mathbb{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I} | \psi_{fin} \rangle &= \langle \psi_{fin} | (\mathbb{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I}) (\mathbb{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I}) | \psi_{fin} \rangle \\ &= \frac{1}{9} \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}a\vec{y}}|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}b\vec{y}}|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}c\vec{y}}|2\rangle \right\}^* \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}a\vec{y}}|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}b\vec{y}}|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}c\vec{y}}|2\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

e) Quand on fait une mesure on obtient

$(0, 0, \dots, 0)$ ou $(1, 0, \dots, 0)$ ou $(2, 0, \dots, 0)$

avec probabilité $1/3$. Si on obtient $(1, 0, \dots, 0)$ ou $(2, 0, \dots, 0)$ on connaît H^\perp (puisque l'on sait que sa dimension est 1). Une fois H^\perp connu on connaît H . La probabilité d'échec lors d'une mesure est donc $1/3$ (événement $(0, 0, \dots, 0)$).

$$\text{Prob}(\text{succès avec } T \text{ mesures}) = 1 - \text{Prob}(\text{échec } T \text{ fois}) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^T = 1 - \epsilon.$$

$$\Rightarrow \epsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^T \Rightarrow T = \frac{\ln \epsilon}{\ln 3}.$$

f) *Preuve de l'indication :*

- Si $\vec{y} \in H^\perp = \{\vec{y} \mid \vec{y} \cdot \vec{x} = 0 \forall \vec{x} \in H\}$ on a bien sûr

$$\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3} \vec{x} \cdot \vec{y}\right) = \sum_{\vec{x} \in H} 1 = |H| = 3^{n-1}.$$

- Si $\vec{y} \notin H^\perp$ alors $\exists \vec{x}_0 \in H$ t.q. $\vec{y} \cdot \vec{x}_0 \neq 0$ c.à.d. $= j \pmod{3}$, $j = 1$ ou 2 .

$$\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3} \vec{x} \cdot \vec{y}\right) = \left(\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3} \vec{x} \cdot \vec{y}\right) \right) \exp\left(\frac{2\pi i}{3} \vec{x}_0 \cdot \vec{y}\right),$$

car H est un groupe et donc invariant par $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{x}_0$

$$\Rightarrow \left(\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3} \vec{x} \cdot \vec{y}\right) \right) \left(1 - \exp\left(\frac{2\pi i}{3} \vec{x}_0 \cdot \vec{y}\right) \right) = 0$$

Puisque $\exp\left(\frac{2\pi i}{3} \vec{x}_0 \cdot \vec{y}\right)$ est $e^{\frac{2\pi i}{3}} \neq 1$ ou $e^{\frac{4\pi i}{3}} \neq 1$,

$$\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3} \vec{x} \cdot \vec{y}\right) = 0.$$

Exercice 2 *Effet des imperfections sur l'algorithme de Simon*

a) L'état juste après les deux premières portes est :

$$\begin{aligned} H_0 \otimes H_1 (|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) &= H_0 |0\rangle \otimes H_1 |0\rangle \otimes |0\rangle \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle + (-1)^0 e^{i\varphi_0} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + (-1)^0 e^{i\varphi_1} |1\rangle) \otimes |0\rangle \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle + e^{i\varphi_1} |01\rangle + e^{i\varphi_0} |10\rangle + e^{i\varphi_0+i\varphi_1} |11\rangle) \otimes |0\rangle \end{aligned}$$

b) Après U_f :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \{U_f(|00\rangle \otimes |0\rangle) + e^{i\varphi_1} U_f(|01\rangle \otimes |0\rangle) + e^{i\varphi_0} U_f(|10\rangle \otimes |0\rangle) + e^{i\varphi_0+i\varphi_1} U_f(|11\rangle \otimes |0\rangle)\} \\ &= \frac{1}{2} \{|00\rangle \otimes |0\rangle + e^{i\varphi_1} |01\rangle \otimes |0\rangle + e^{i\varphi_0} |10\rangle \otimes |1\rangle + e^{i\varphi_0+i\varphi_1} |11\rangle \otimes |0\rangle\}, \end{aligned}$$

où on a utilisé $f(00) = f(01) = 0$ et $f(10) = f(11) = 1$.

Enfin appliquons les deux dernières portes de Hadamard $H \otimes H$ aux deux premiers qu-bits :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (H \otimes H |00\rangle) \otimes |0\rangle + \frac{1}{2} e^{i\varphi_1} (H \otimes H |01\rangle) \otimes |0\rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{i\varphi_0} (H \otimes H |10\rangle) \otimes |1\rangle + \frac{1}{2} e^{i(\varphi_0+\varphi_1)} (H \otimes H |11\rangle) \otimes |1\rangle \\ &= \frac{1}{4} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \otimes |0\rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} e^{i\varphi_1} (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \otimes |0\rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} e^{i\varphi_0} (|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) \otimes |1\rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} e^{i(\varphi_0+\varphi_1)} (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \otimes |1\rangle. \end{aligned}$$

L'état juste avant la mesure est :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \{(1 + e^{i\phi_1}) |00\rangle + (1 - e^{i\phi_1}) |01\rangle + (1 + e^{i\phi_1}) |10\rangle + (1 - e^{i\phi_1}) |11\rangle\} \otimes |0\rangle \\ &+ \frac{e^{i\varphi_0}}{4} \{(1 + e^{i\phi_1}) |00\rangle + (1 - e^{i\phi_1}) |01\rangle + (1 + e^{i\phi_1}) |10\rangle + (1 - e^{i\phi_1}) |11\rangle\} \otimes |1\rangle \end{aligned}$$

c) Mesure des deux premiers qu-bits :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[00] &= \frac{1}{16} |1 + e^{i\varphi_1}|^2 + \frac{1}{16} |1 + e^{i\varphi_1}|^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_1}{2}, \\ \text{Prob}[01] &= \frac{1}{16} |1 - e^{i\varphi_1}|^2 + \frac{1}{16} |1 - e^{i\varphi_1}|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}, \\ \text{Prob}[10] &= \frac{1}{16} |1 + e^{i\varphi_1}|^2 + \frac{1}{16} |1 + e^{i\varphi_1}|^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_1}{2}, \\ \text{Prob}[11] &= \frac{1}{16} |1 - e^{i\varphi_1}|^2 + \frac{1}{16} |1 - e^{i\varphi_1}|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}. \end{aligned}$$

d) Pour toujours trouver un vecteur dans $H^\perp = \{(0, 0); (1, 0)\}$, il est nécessaire et suffisant de prendre $\varphi_1 = 0$ et φ_0 quelconque :

$$\begin{cases} \text{Prob}[00] = \frac{1}{2} \\ \text{Prob}[10] = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \text{Prob}[(0, 0) \text{ ou } (1, 0)] = 1,$$
$$\begin{cases} \text{Prob}[01] = 0 \\ \text{Prob}[11] = 0 \end{cases} \implies \text{Prob}[(0, 1) \text{ ou } (1, 1)] = 0.$$

En général, avec $\varphi_1 \neq 0$, on a

$$\text{Prob}[00 \text{ ou } 10] = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} = \cos^2 \frac{\varphi_1}{2},$$
$$\text{Prob}[01 \text{ ou } 11] = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}.$$