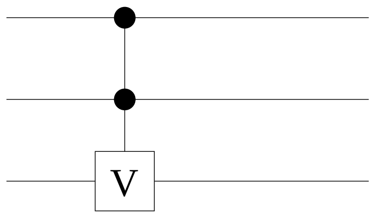
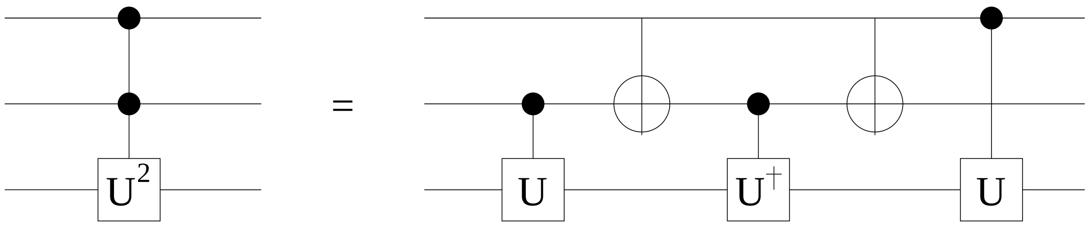
Série 4
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Porte de Toffoli CCNOT*

Soit V une matrice 2×2 unitaire.
La porte "double contrôle-V" notée CCV est définie par le circuit suivant :



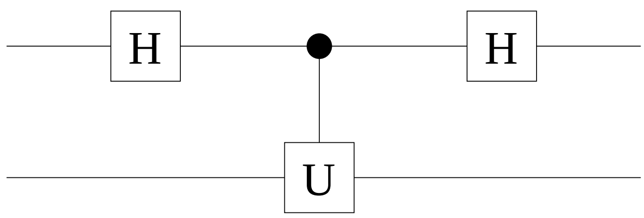
1a) Montrez que pour tout U unitaire 2×2 :



1b) Comment choisir U pour réaliser la porte de Toffoli CCNOT ? Donnez explicitement une telle matrice U.

Exercice 2 *Un petit algorithme quantique*

Soit U une matrice unitaire et $|u\rangle$ un vecteur propre, c'est à dire $U|u\rangle = \exp(2\pi i \varphi)|u\rangle$. Considérez le circuit suivant :



3a) Calculez la sortie pour l'état initial $|0\rangle \otimes |u\rangle$.

3b) Calculez la probabilité d'observer le premier bit dans l'état $|0\rangle$ à la sortie. Même question pour la probabilité d'observer le premier bit dans l'état $|1\rangle$ à la sortie. Même question pour les probabilités d'observer $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$; $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$; $\frac{|0\rangle+i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ et $\frac{|0\rangle-i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ à la sortie.

3c) Supposons que l'on remplace U par U^k, k entier dans le circuit ci-dessus. Soit $\varphi = 0, \varphi_1\varphi_2...\varphi_t$ le développement binaire de $0 < \varphi < 1$. Comment choisir k pour déterminer le bit le moins significatif φ_t en une seule mesure ?

Exercice 3 *Algorithme de Simon*

Il s'agit de réfléchir aux calculs du cours dans un cas très concret. On considère le sous espace vectoriel de dimension 1

$$H = \{(0,0);(1,0)\}$$

"caché" dans le carré binaire

$$\mathbb{F}_2^n = \{(0,0);(1,0);(1,0);(1,1)\}$$

En d'autre termes on dispose d'un oracle qui retourne deux valeurs distinctes pour une fonction $f : \mathbb{F}_2^n \to X$ (où X possède deux éléments) telle que $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$ si et sulement si $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ ou $(x_1, x_2) - (y_1, y_2) = (1, 0)$. le but est de trouver le vecteur $(1, 0)$ (c'est le vecteur de base du sous-espace caché H).