Série 3
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Algorithme : probabiliste versus quantique*

Une matrice P est dite stochastique si $0 \leq P_{kl} \leq 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} P_{kl} = 1$. Ici P_{kl} représente une probabilité de transition $l \to k$.

Soit U une matrice unitaire $n \times n$ et $|0\rangle$, $|1\rangle$, ..., $|n-1\rangle$ une base orthonormée.

1. Montrez que $|\langle j| U |i\rangle|^2 = R_{ji}$ est une matrice stochastique. Notez que R_{ji} représente une probabilité d'observer la transition $|i\rangle \to |j\rangle$ (postulat de la mesure) si on fait la mesure dans la base $|0\rangle$, $|1\rangle$, ..., $|n-1\rangle$.
2. On considère le processus de calcul stochastique classique donné par la figure 1.

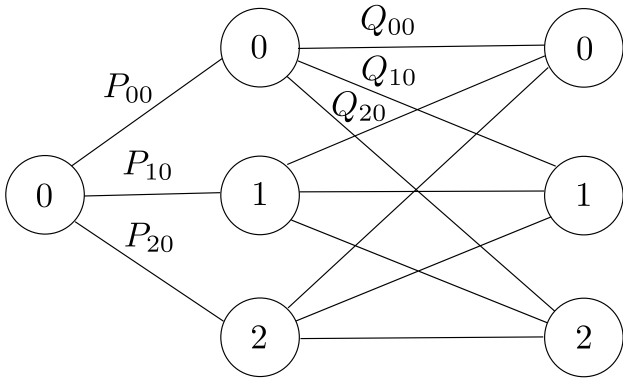

Figure 1 – processus classique

   On initialise le registre d'entrée dans l'état 0. Lors de la première étape, l'état transite vers 0, 1, 2 avec probabilité P_{j0}. Lors de la deuxième étape, l'état transite vers 0, 1, 2 avec probabilité Q_{kj}. Calculez la probabilité d'observer l'état 2 à la sortie.
3. On considère l'analogue quantique de la figure 2. Ici le registre peut être dans 3 états quantiques $|0\rangle$, $|1\rangle$ et $|2\rangle$. La première étape de calcul est décrite par une matrice d'évolution unitaire U_1 et la deuxième étape par U_2. On suppose que $|\langle j| U_1 |i\rangle|^2 = P_{ji}$ et $|\langle j| U_2 |i\rangle|^2 = Q_{ji}$.
   - Calculez la probabilité d'observer l'état $|2\rangle$ à la sortie si l'état d'entrée est $|0\rangle$. Comparez le résultat avec le cas classique.
   - Supposons que l'on fasse une mesure intermédiaire après la première étape. Quelle est la probabilité d'observer l'état final $|2\rangle$ à la sortie, si l'état initial est $|0\rangle$. Y-a-t'il une différence avec le cas classique ?

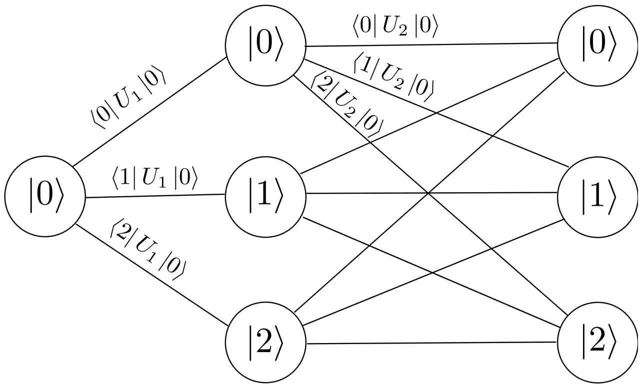

FIGURE 2 – processus quantique

Exercice 2 *Variation sur le problème de Deutsch-Josza*

En 1993 E. Bernstein et U. Vazirani (Proc, 25th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, ACM Press, NY p11-20) formulèrent le problème suivant. On se donne un "oracle" qui calcule

$$f\left(\underline{x}\right) = \underline{a} \cdot \underline{x} \oplus b \mod 2$$

pour chaque entrée $\underline{x} \in \mathbb{F}_2^n$. Ici $\underline{a} \in \mathbb{F}_2^n$ et $b \in \mathbb{F}_2$. Le but est de calculer $\underline{a}$ en posant le moins de questions possibles à l'oracle.

1. Combien de questions faut-il poser à l'oracle pour déterminer $\underline{a}$ classiquement ?
2. Montrez que
$$\sum_{\underline{x} \in \mathbb{F}_2^n} (-1)^{\underline{x} \cdot \underline{z}} = \begin{cases} 2^n & \text{si } \underline{z} = (0, 0, ..., 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
3. En utilisant le point précédent montrez que grâce au circuit de Deutsch-Josza, il suffit de poser une seule question à "l'oracle quantique" pour déterminer $\underline{a}$.

Exercice 3 *Facultatif : vérification pour bonne compréhension si besoin est*

On adopte la notation $|b\rangle$, $|c\rangle$ pour les états de la base canonique $|1\rangle$, $|0\rangle$ (c.à.d. que $b = 0, 1$ et $c = 0, 1$). Vérifiez que

$$\begin{aligned} H\left|b\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|0\right\rangle + (-1)^b \left|1\right\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{c=0}^{1} (-1)^{bc} \left|c\right\rangle \end{aligned}$$

et vérifiez pour $n = 2$

$$H^{\otimes n} \left|b_1, ..., b_n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{(c_1,...,c_n) \in \mathbb{F}_2^n} (-1)^{\sum_{i=1}^n b_i c_i} \left|c_1, ..., c_n\right\rangle$$

et ensuite le cas général.