Solution de la série 2
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Résonance Magnétique Nucléaire*

Les valeurs propres de l'Hamiltonien (les niveaux d'énergies possibles) sont égales à $E_\uparrow = -\frac{\hbar\omega_0}{2}$, $E_\downarrow = +\frac{\hbar\omega_0}{2}$ et leurs vecteurs propres associés sont $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$.

1. Les fractions N_i/N sont égales à :

$$\frac{N_i}{N} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

Comme $N_\uparrow + N_\downarrow = N$, on peut dès lors écrire le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
N_\uparrow &= \frac{N}{Z} e^{\frac{\hbar\omega_0}{2kT}} \\
N_\downarrow &= \frac{N}{Z} e^{-\frac{\hbar\omega_0}{2kT}} \\
N &= \frac{N}{Z}\left(e^{\frac{\hbar\omega_0}{2kT}} + e^{-\frac{\hbar\omega_0}{2kT}}\right) = 2\frac{N}{Z}\cosh\frac{\hbar\omega_0}{2kT}
\end{aligned}$$

On trouve finalement :

$$\begin{aligned}
N_\uparrow &= \frac{N}{2\cosh\frac{\hbar\omega_0}{2kT}} e^{\frac{\hbar\omega_0}{2kT}} \\
N_\downarrow &= \frac{N}{2\cosh\frac{\hbar\omega_0}{2kT}} e^{-\frac{\hbar\omega_0}{2kT}}
\end{aligned}$$

2. Une particule du groupe $N_\uparrow$ se trouve dans l'état $|\uparrow\rangle$ et la valeur moyenne de son aimantation (c'est un vecteur) est

$$\langle\uparrow|\,\vec{\mu}\,|\uparrow\rangle = \frac{g\hbar}{2}\begin{pmatrix}\langle\uparrow|\,\sigma_x|\uparrow\rangle \\ \langle\uparrow|\,\sigma_y|\uparrow\rangle \\ \langle\uparrow|\,\sigma_z|\uparrow\rangle\end{pmatrix} = \frac{g\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Pour une particule du groupe $N_\downarrow$, dans l'état $|\downarrow\rangle$, on trouve similairement

$$\langle\downarrow|\,\vec{\mu}\,|\downarrow\rangle = -\frac{g\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Le vecteur aimantation $\vec{M}$ de l'échantillon se calcule en sommant les contributions (les aimantations) des particules $N_\downarrow$ et $N_\uparrow$ et on obtient :

$$\vec{M} = N_\uparrow \langle\uparrow|\,\vec{\mu}\,|\uparrow\rangle + N_\downarrow \langle\downarrow|\,\vec{\mu}\,|\downarrow\rangle = \frac{g\hbar}{2}\left(N_\uparrow - N_\downarrow\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$= \frac{g\hbar N}{4\cosh\frac{\hbar\omega_0}{2kT}}\left(e^{\frac{\hbar\omega_0}{2kT}} - e^{-\frac{\hbar\omega_0}{2kT}}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{g\hbar N}{2}\tanh\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

L'aimantation est dirigée selon l'axe z dans le même sens que $\vec{B}_0$. On remarque aussi que si la température devient grande $T \to \infty$, alors $\tanh\frac{\hbar\omega_0}{2kT}$ devient nul et l'aimantation totale devient nulle. Si au contraire $T \to 0$ la $\tanh\frac{\hbar\omega_0}{2kT}$ vaut 1 et l'aimantation est maximum.

3. Après le $\frac{\pi}{2}$ pulse, on est dans une situation où une quantité de particules $N_\uparrow$ se trouve dans l'état $|+\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)$ et une quantité $N_\downarrow$ se trouve dans l'état $|-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$. On a vu en cours que les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ soumis au champs $\vec{B}_0$ vont évoluer au cours du temps (à une phase globale près) de la façon suivante :

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + e^{-i\omega_0 t}|\downarrow\rangle\right)$$
$$|-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - e^{-i\omega_0 t}|\downarrow\rangle\right)$$

On recalcule l'aimantation $\vec{M}(t)$ de la même manière qu'au point précédent à ceci près que les quantités dépendent du temps. On trouve pour les particules du groupe $N_\uparrow$

$$\frac{1}{2}\left(\langle\uparrow| + e^{i\omega_0 t}\langle\downarrow|\right)\vec{\mu}\left(|\uparrow\rangle + e^{-i\omega_0 t}|\downarrow\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\langle\uparrow|\,\vec{\mu}\,|\uparrow\rangle + e^{i\omega_0 t}\langle\downarrow|\,\vec{\mu}\,|\uparrow\rangle + e^{-i\omega_0 t}\langle\uparrow|\,\vec{\mu}\,|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|\,\vec{\mu}\,|\downarrow\rangle\right)$$
$$= \frac{g\hbar}{4}\begin{pmatrix}e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\\ ie^{i\omega_0 t} - ie^{-i\omega_0 t}\\ 0\end{pmatrix} = \frac{g\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t\\ -\sin\omega_0 t\\ 0\end{pmatrix}$$

De la même manière pour une particule du groupe $N_\downarrow$ on trouve :

$$-\frac{g\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t\\ -\sin\omega_0 t\\ 0\end{pmatrix}$$

On a alors que l'aimantation totale de l'échantillon est à présent :

$$\vec{M}(t) = \frac{g\hbar N}{2}\tanh\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t\\ -\sin\omega_0 t\\ 0\end{pmatrix}$$

L'aimantation est dirigée dans le plan xy et tourne dans ce plan avec une fréquence ω_0.

4. On rappelle que le vecteur $\vec{S}$ est un vecteur perpendiculaire à la surface (dans notre cas $\vec{S}$ est orienté selon l'axe y) et de norme égale à l'aire de la surface. Le flux dans une spire est alors

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \vec{S}\cdot\vec{M}\\ &= -\frac{g\hbar NS}{2}\tanh\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\sin\omega_0 t\end{aligned}$$

La tension aux extrémités d'une spire de la bobine est alors (par la loi de Faraday) :

$$\begin{aligned}u(t) &= -\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}\\ &= \frac{g\hbar\omega_0 NS}{2}\tanh\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\cos\omega_0 t\end{aligned}$$

Comme les spires sont montées en séries, la tension totale $U(t)$ dans la bobine est

$$U(t) = \frac{g\hbar\omega_0 NnS}{2}\tanh\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\cos\omega_0 t$$

D'après la loi d'Ohm le courant est alors

$$I(t) = U(t)/R = \frac{g\hbar\omega_0 NnS}{2R}\tanh\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\cos\omega_0 t$$

5. Avec l'indication, la transformée de Fourier du courant $I(t)$ est

$$\mathcal{F}(I)(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{g\hbar\omega_0 NnS}{2R}\tanh\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

On devrait donc observer deux pics et leur position nous renseigne sur la valeur de ω_0 (ils sont centré en $\pm\omega_0$). Ensuite comme R, n, T, S (et évidemment g , $\hbar$, k) sont connus, l'amplitude du pic nous fournis directement la valeur de N : le nombre de particules de l'échantillon.

6. On rappelle que la transformée de Fourier d'un produit de fonction est la convolution des transformées de Fourier de ces fonctions i.e.

$$\mathcal{F}(f\cdot g)(\omega) = \int \mathcal{F}(f)(\nu)\cdot\mathcal{F}(g)(\omega-\nu)\,d\nu$$

La convolution avec une fonction delta étant triviale on obtient finalement :

$$\mathcal{F}(I_r)(\omega) = \frac{g\hbar\omega_0 NnS}{2R}\tanh\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\left(\frac{\tau}{1+(\omega+\omega_0)^2\tau^2}+\frac{\tau}{1+(\omega-\omega_0)^2\tau^2}\right)$$

Les deux pics sont toujours centrés en $\pm\omega_0$ mais la hauteur est à présent multipliée par τ. Pour connaître τ , il faut mesure la largeur du pic à la mi-hauteur. Cette largeur vaut $\frac{2}{\tau}$. Ensuite il devient possible de retrouver N comme dans le point précédent.