Solution de la série 1
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Propriétés des matrices de Pauli*

1. On a :

$$A = a_0 I + a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. On doit avoir :

$$\begin{cases} a_0 + a_3 = a_{11} \\ a_0 - a_3 = a_{22} \end{cases}$$

ce qui implique $a_0 = \dfrac{a_{11} + a_{22}}{2}$ et $a_3 = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2}$.
D'autre part on doit avoir :

$$\begin{cases} a_1 - ia_2 = a_{12} \\ a_1 + ia_2 = a_{21} \end{cases}$$

ce qui implique $a_1 = \dfrac{a_{12} + a_{21}}{2}$ et $a_2 = \dfrac{a_{21} - a_{12}}{2i}$.
Donc toute matrice 2×2 A peut s'écrire :

$$A = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} I + \frac{a_{12} + a_{21}}{2}\sigma_x + \frac{a_{21} - a_{12}}{2i}\sigma_y + \frac{a_{11} - a_{22}}{2}\sigma_z.$$

Notez que si $A = A^\dagger$ on doit avoir a_0, a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$ et vice versa.

2. Nous vérifions à chaque fois uniquement la première relation.

$$\begin{aligned}
[\sigma_x, \sigma_y] &= \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i\sigma_z
\end{aligned}$$

Les autres calculs sont similaires. Remarquez que les relations s'obtiennent de la première par permutation cyclique de xyz.

$$
\begin{aligned}
\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.
$$

Puisque $\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x$ on a :

$$
\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2\sigma_x\sigma_x.
$$

Puisque $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$ on déduit $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$.

3.

$$
\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z \qquad \text{par définition}
$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 &= (n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z)(n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z) \\
&= n_x^2\sigma_x^2 + n_y^2\sigma_y^2 + n_z^2\sigma_z^2 \\
&+ n_xn_y\sigma_x\sigma_y + n_yn_x\sigma_y\sigma_x \\
&+ n_xn_z\sigma_x\sigma_z + n_zn_x\sigma_z\sigma_x \\
&+ n_yn_z\sigma_y\sigma_z + n_zn_y\sigma_z\sigma_y \\
&= \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) I = I
\end{aligned}
$$

Dans la seconde égalité on a fait attention au fait que les matrices de Pauli ne commutent pas. Dans la troisième on a utilisé les relations sous 2. Dans la dernière égalité on a utilisé que $\vec{n}$ est un vecteur unité (sa norme vaut 1).
Cette identité implique $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^3 = \vec{n}\cdot\vec{\sigma}; (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^4 = I;$ etc...
Ainsi

$$
\begin{aligned}
\exp(it\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^k \\
&= \sum_{k \text{ pairs}} \frac{(it)^k}{k!} I + \left\{ \sum_{k \text{ impairs}} \frac{(it)^k}{k!} \right\} (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})
\end{aligned}
$$

D'autre part

$$\cos t = \sum_{k \text{ pairs}} \frac{(it)^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad i \sin t = \sum_{k \text{ impairs}} \frac{(it)^k}{k!} \tag{*}$$

(*Parenthèse :* Voir un formulaire, ou bien notez que

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \qquad \text{et donc :}$$

$$\sum_{k \text{ pairs}} \frac{(it)^k}{k!} + \sum_{k \text{ impairs}} \frac{(it)^k}{k!} = \cos t + i \sin t,$$

ensuite en changeant $t \to -t$ on a aussi

$$\sum_{k \text{ pairs}} \frac{(it)^k}{k!} - \sum_{k \text{ impairs}} \frac{(it)^k}{k!} = \cos t - i \sin t,$$

et en additionnant et soustrayant on trouve $(*)$.)
Finalement on a bien prouvé :

$$\exp(it\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = (\cos t)I + (i \sin t)\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$$

4. Ecrivez explicitement les matrices 2×2 !
5. <u>Diagonalisation de σ_x.</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} v_1 = \lambda v_2 \\ v_2 = \lambda v_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow v_1 = \lambda^2 v_1$ et $v_2 = \lambda^2 v_2$. Pour avoir $v_1 \; v_2 \neq 0$ il faut $\lambda^2 = +1$ et donc $\lambda = \pm 1$.
les valeurs propres sont ± 1.
Le vecteur propre associé à $\lambda = +1$ satisfait à

$$v_1 = v_2 \qquad \text{et} \qquad v_2 = v_1.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{est un vecteur propre normalisé}$$

Le vecteur propre associé à $\lambda = -1$ satisfait à :

$$v_1 = -v_2 \qquad \text{et} \qquad v_2 = -v_1.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{est un vecteur propre normalisé}$$

<u>Diagonalisation de σ_y.</u>
On peut procéder comme avant. On peut aussi trouver les valeurs propres en résolvant :

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & -i\\ i & -\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2-(-i)(i)=\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=\pm 1$$

Le vecteur propre associé à $\lambda = +1$ satisfait à :

$$\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = +1\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} -iv_2 = v_1\\ iv_1 = v_2\end{array}\right.$$

Les deux équations sont identiques. On choisi $v_1 = 1$ et $v_2 = i$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \quad \text{est un vecteur propre normalisé}$$

Pour le vecteur propre associé à -1 on a :

$$\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} -iv_2 = -v_1\\ iv_1 = -v_2\end{array}\right.$$

On choisi $v_1 = 1$ et $v_2 = -i$

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} \quad \text{est un vecteur propre normalisé.}$$

<u>Diagonalisation de σ_z.</u>

$$\sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{dans la base} \quad \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Donc 1 est la valeur propre associée à $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ et -1 est la valeur propre associée à $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

Trace. La trace d'une matrice est égale à la somme des élements diagonaux. Celle-ci est aussi égale à la somme des valeurs propres. On vérifie que tout est consistent et que $\mathrm{Tr}\,\sigma_x = \mathrm{Tr}\,\sigma_y = \mathrm{Tr}\,\sigma_z = 0$.

Déterminant. Le déterminant est égal à $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Mais c'est aussi le produit des valeurs propres. On vérifie que tout est consistent et que $\det\sigma_x = \det\sigma_y = \det\sigma_z = -1$.

6. En notation de Dirac on a :

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}\left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right| + a_{12}\left|\uparrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right| + a_{21}\left|\downarrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right| + a_{22}\left|\downarrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right|.$$

En fait, il est utile de réaliser que ceci est consistent avec

$$\left\langle\uparrow\right|A\left|\uparrow\right\rangle = a_{11};\ \left\langle\uparrow\right|A\left|\downarrow\right\rangle = a_{12};\ \left\langle\downarrow\right|A\left|\uparrow\right\rangle = a_{21} \ \text{ et } \ \left\langle\downarrow\right|A\left|\downarrow\right\rangle = a_{22}.$$

D'autre part

$$\left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right| = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\ \left|\uparrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right| = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix};\ \left|\downarrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right| = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \ \text{ et } \ \left|\downarrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right| = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Maintenant la vérification demandée est triviale. Le problème aux valeurs propres en notation de Dirac s'écrit :

$$A\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle$$

ou bien

$$\left(a_{11}\left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right| + a_{12}\left|\uparrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right| + a_{21}\left|\downarrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right| + a_{22}\left|\downarrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right|\right)\left(\alpha\left|\uparrow\right\rangle + \beta\left|\downarrow\right\rangle\right) = \lambda\alpha\left|\uparrow\right\rangle + \lambda\beta\left|\downarrow\right\rangle$$

$$\begin{cases} \alpha a_{11}\left|\uparrow\right\rangle + \alpha a_{21}\left|\downarrow\right\rangle + \beta a_{12}\left|\uparrow\right\rangle + \beta a_{22}\left|\downarrow\right\rangle = \lambda\alpha\left|\uparrow\right\rangle + \lambda\beta\left|\downarrow\right\rangle \\ (\alpha a_{11} + \beta a_{12})\left|\uparrow\right\rangle + (\alpha a_{21} + \beta a_{22})\left|\downarrow\right\rangle + = \lambda\alpha\left|\uparrow\right\rangle + \lambda\beta\left|\downarrow\right\rangle \end{cases}$$

Cela signifie :

$$\begin{cases} \alpha a_{11} + \beta a_{12} = \lambda\alpha \\ \alpha a_{21} + \beta a_{22} = \lambda\beta \end{cases}$$

Ce qui est bien sûr equivalent à la version matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ou bien encore

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont données par la condition $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et donc

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0 \text{ etc...}$$

Finalement, il faut encore résoudre cette équation du second degré en λ.

Exercice 2 *Interféromètre de Mach-Zehnder*

1. L'état initial est : $|h\rangle$
   Après le 1^{er} miroir semi-transparent : $\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + i\,|v\rangle)$.
   Après les deux déphaseurs : $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}\,|h\rangle + ie^{i\varphi_2}\,|v\rangle)$.
   Après les miroirs réflichissants : $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}\,|v\rangle - ie^{i\varphi_2}\,|h\rangle)$.
   Après $2^{\text{ém}}$ miroir semi-transparent :
$$\begin{aligned}
&\frac{ie^{i\varphi_1}}{2}(i\,|h\rangle + |v\rangle) - \frac{e^{i\varphi_i}}{2}(|h\rangle + i\,|v\rangle) \\
&= \frac{1}{2}[-(e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2})\,|h\rangle + i(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2})\,|v\rangle] \\
&= -\frac{e^{i\varphi_1}}{2}[(1 + e^{i\Delta\varphi})\,|h\rangle - i(1 - e^{i\Delta\varphi})\,|v\rangle] \\
&= |\psi_{\text{fin}}\rangle\,,
\end{aligned}$$
   avec $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.
2. La probabilité de détection en D_1 est
$$\begin{aligned}
\text{prob}(D_1) &= |\langle h\,|\psi_{\text{fin}}\rangle\,|^2 \\
&= \frac{1}{4}|1 + e^{i\Delta\varphi}|^2 \\
&= \frac{1}{4}|e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} + e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}}|^2 \\
&= \cos^2(\frac{\Delta\varphi}{2}).
\end{aligned}$$
   Probabilité de détection en D_2 est $|\langle h\,|\psi_{\text{fin}}\rangle\,|^2 = \sin^2(\frac{\Delta\varphi}{2})$. Ces probabilités dépendent seulement de $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, donc seules les <u>différences de phases sont mesurables</u> et non pas les "phases absolues ou globales".
3. – Miroir semi-transparent $= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ (matrice unitaire)
   – Miroir réflichissant $= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ (matrice unitaire)
   – Déphaseurs (cristaux) $= \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}$ (matrices unitaires)
$$\text{produit} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}$$
   Pour le circuit correspondant voir figure 1 :

   Remarque : On peut aussi vérifier :
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}}_{\frac{\pi}{2}\text{shift}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{H (Hadamard)}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

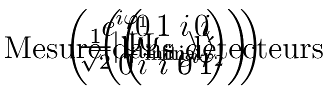

Figure 1 – circuit correspondant à l'interféromètre

Donc pour réaliser une porte de Hadamard physiquement on peut utiliser

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}}_{Beamersplitter} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{-\frac{\pi}{2}\,\text{shift}}.$$

D'autrepart

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{i}_{\text{phase globale}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{NOT \text{ or } X}.$$

Le circuit ci-dessus est aussi équivalent à

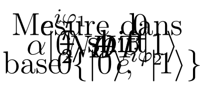

Figure 2 – circuit équivalent