Série 10
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Etats de mélange*

(a) Montrer que les états de mélange de deux sources

$$\left\{ |0\rangle, \frac{1}{2}; |1\rangle, \frac{1}{2} \right\}$$

et

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \frac{1}{2} \right\}$$

correspondent à la même matrice densité.

(b) Pour une source dans l'état de mélange

$$\left\{ 0, \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \frac{1}{2} \right\}$$

donnez la matrice densité et sa décomposition spectrale.

Exercice 2 *Sphère de Bloch*

Nous avons vu au cours que toute matrice densité pour 1 qubit peut s'écrire

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \vec{N}\cdot\vec{\sigma}\right) \text{ avec } \|\vec{N}\| < 1,$$

où $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sont les trois matrices de Pauli.

(a) Montrez que si $\|\vec{N}\| = 1$ alors $\rho^2 = \rho$.
Remarque : cela signifie que ρ est un projecteur, donc qu'il existe $|\psi\rangle$ tel que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

(b) Représentez les vecteurs suivants de la sphère de Bloch :

$$\begin{aligned} \vec{N} &= (0,0,0); (0,0,\pm1); (0,\pm1,0); (\pm1,0,0) \\ \vec{N} &= (\cos\theta\sin\phi, \cos\theta\cos\phi, \sin\theta) \\ \vec{N} &= (0,0,\pm\alpha), 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

(c) Pour chacun de ces vecteurs calculez ρ. Pour lesquels de ces vecteurs ρ est-il un état pur ? Quand ρ est un état pur donnez de ket correspondant de l'espace de Hilbert.

Exercice 3

Considerez les canaux bit-flip ; phase-flip ; bit&phase-flip et dépolarisant vus au cours et donnez leur représentation en terme de la sphère de Bloch.