

---

Série 9  
Traitement quantique de l'information II

---

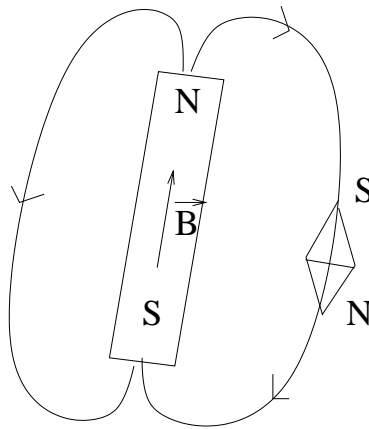
## Hamiltonien de Heisenberg

### Rappel

Nous avons vu que l'énergie d'interaction d'un moment magnétique  $\vec{M}$  avec un champ magnétique  $\vec{B}$  est donnée par

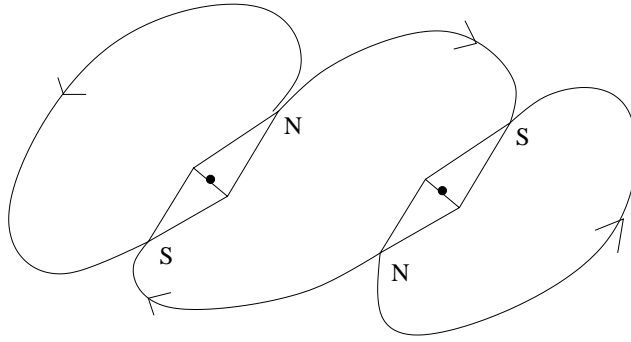
$$H = -\vec{B} \cdot \vec{M}$$

La différence entre cette quantité et son minimum est l'énergie qu'il faut fournir pour faire dévier la boussole de son état d'équilibre (voir figure).



### Interaction entre deux moments magnétiques

Prenons maintenant deux moments magnétiques et supposons pour le moment qu'il n'y a aucun champ magnétique externe. Leur énergie d'interaction est proportionnelle à  $\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2$ . Le minimum est atteint pour la configuration d'équilibre de la figure qui correspond à prendre  $\vec{M}_1$  et  $\vec{M}_2$  opposés. Notez que  $\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2$  est la fonction la plus simple des deux vecteurs  $\vec{M}_1$  et  $\vec{M}_2$  qui soit invariante sous les rotations.



En M.Q. pour deux spins 1/2 on a  $\vec{M}_1 = g_1 \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_1$  et  $\vec{M}_2 = g_2 \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_2$ . On posera donc pour l'hamiltonien d'interaction

$$H = \hbar J \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

C'est l'hamiltonien de Heisenberg, L'espace de Hilbert des deux spins (ou deux q-bits!) est  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  et la formule ci-dessus signifie en fait

$$H = \hbar J (\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y + \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z)$$

L'hamiltonien de Heisenberg est donc une matrice  $4 \times 4$ .

1. Écrire la matrice  $4 \times 4$  explicitement.
2. Montrez que

$$H = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + 2\hbar J (\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \sigma_1^- \otimes \sigma_2^+)$$

3. Poser  $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et vérifiez les relations

$$\begin{aligned} \sigma_z |\uparrow\rangle &= |\uparrow\rangle & \sigma_z |\downarrow\rangle &= -|\downarrow\rangle \\ \sigma_+ |\uparrow\rangle &= 0 & \sigma_+ |\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle \\ \sigma_- |\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle & \sigma_- |\downarrow\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Pour cette raison on appelle souvent  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  les "raising and lowering operators".

4. Analysez l'action de  $H$  sur l'état dit "singulet"

$$|\psi_{0,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

et sur les états "triplets"

$$\begin{aligned} |\psi_{1,1}\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\psi_{1,0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\psi_{1,-1}\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}$$

En déduire les niveaux d'énergie de  $H$  et les placer sur un axe (vertical).

5. On ajoute maintenant un champ magnétique extérieur  $\vec{B} = (0, 0, B)$ . L'hamiltonien total est maintenant

$$H = -\gamma_1 \vec{B} \cdot \vec{\sigma}_1 - \gamma_2 \vec{B} \cdot \vec{\sigma}_2 + \hbar J \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

On posera  $\gamma_1 B = \hbar \omega_1$  et  $\gamma_2 B = \hbar \omega_2$ . Ecrire la matrice  $4 \times 4$  explicitement. On regarde maintenant le cas  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0/2$  (ou  $\gamma_1 = \gamma_2$ ). En utilisant directement d) donnez les valeurs et vecteurs propres et faites un graphe des niveaux d'énergie en fonction de  $B$ .