Série 6
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Variation sur le problème de Simon*

Un qu-trit est un système quantique à 3 niveaux d'énergie. Les 3 états de base correspondants sont notés $|0\rangle$, $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Un état général appartient à l'espace d'Hilbert $\mathbb{C}^3$,

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle + \gamma\,|2\rangle$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ et $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Soit $\mathbb{F}_3^n$ l'espace vectoriel des vecteurs $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ à n composantes avec chaque composante prise $\bmod 3$. Le corps de l'espace vectoriel est $\mathbb{F}_3$ (entiers avec $+$ et $\times$ $\bmod 3$). Soit H le sous-espace vectoriel

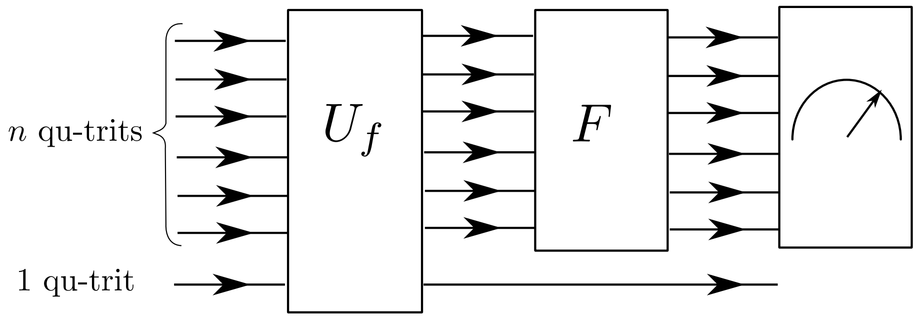
$$H = \left\{\vec{x} \in \mathbb{F}_3^n \middle|\, \vec{x} = (0, \vec{x}') \text{ avec } \vec{x}' \in \mathbb{F}_3^{n-1}\right\}.$$

On se donne une fonction telle que

$$\begin{aligned} f : & \mathbb{F}_3^n \to \{0, 1, 2\} \\ & \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) \end{aligned}$$

avec $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ si et seulement si $\vec{x} - \vec{y} \in H$.

On considère le circuit quantique suivant :



- L'état d'entrée est initialisé à :

$$|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in \mathbb{F}_3^n} |\vec{x}\rangle \otimes |0\rangle$$

- La porte U_f (unitaire) est définie par

$$U_f\,|\vec{x}\rangle \otimes |y\rangle = |\vec{x}\rangle \otimes |y + f(\vec{x})\rangle \text{ avec } y = 0, 1, 2$$

Ici $y + f(\vec{x})$ est calculé $\bmod 3$.

– La porte F est une version de la transformée de Fourier quantique

$$F\,|\vec{x}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{y}\in\mathbb{F}_3^n} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x}\cdot\vec{y}\right)|\vec{y}\rangle$$

où $\vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mod 3$.

1. Montrez que H est un sous-groupe de $\mathbb{F}_3^n$ pour l'addition $\mathrm{mod}\,3$. Donnez sa cardinalité. Montrez qu'il y a 3 classes d'équivalence de H dans $\mathbb{F}_3^n$ et donnez leur cardinalité.
2. Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ des représentants des 3 classes d'équivalence avec $f(\vec{a}) = 0$, $f(\vec{b}) = 1$, $f(\vec{c}) = 2$. Montrez que l'état juste après la porte U_f est

$$U_f\,|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x}\in H} \left\{ |\vec{a}+\vec{x}\rangle \otimes |0\rangle + \left|\vec{b}+\vec{x}\right\rangle \otimes |1\rangle + |\vec{c}+\vec{x}\rangle \otimes |2\rangle \right\}$$

3. Montrez que l'état juste après la porte F peut s'écrire :

$$(F\otimes\mathbb{I})\,U_f\,|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{3} \sum_{y_1=0,1,2} |y_1, 0, ..., 0\rangle \otimes \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3} y_1 a_1}\,|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3} y_1 b_1}\,|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3} y_1 c_1}\,|2\rangle \right\}$$

Indication : utilisez la formule

$$\sum_{\vec{x}\in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x}\cdot\vec{y}\right) = \begin{cases} 3^{n-1} & \text{si } \vec{y}\in H^{\perp} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Facultatif : prouvez cette formule.

4. Appliquez le postulat de la mesure sur les n premiers qu-trits et montrez que

$$\Pr(\vec{y}) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } \vec{y} = (y_1, 0, ..., 0) \text{ avec } y_1 = 0,1,2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. En admettant que H est un sous-groupe caché de dimension connue $n-1$, combien de mesures faut-il faire pour reconstruire H avec une probabilité de succès égale à $1-\varepsilon$ (ε très petit) ?