

## Série 8 Traitement quantique de l'information II

**Exercice 1** *Algorithme de Grover pour  $N = 4$*

Soit  $x \in \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  et  $f(x) = 1$  si et seulement si  $x = x_0$ . Sinon  $f(x) = 0$ . On recherche  $x_0$  grâce à un oracle qui retourne la valeur de  $f$  quand on lui présente une entrée.

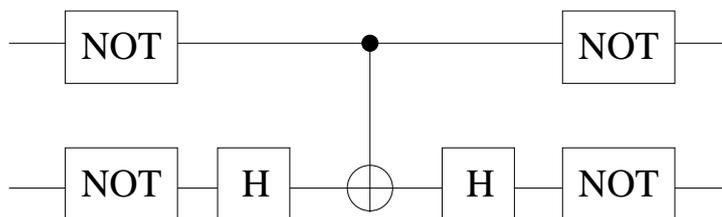
1. Montrez que le nombre moyen de questions à poser à un oracle classique, quand on présente les entrées uniformément aléatoirement et sans remise, est 2,25.
2. D'après la théorie, quelle est le nombre de questions à poser à l'oracle quantique si on utilise le circuit de Grover ?
3. Dans le circuit de Grover on utilise l'opérateur suivant :

$$\mathbb{I} - 2 \underbrace{|00\dots 0\rangle \langle 00\dots 0|}_{n \text{ fois}}$$

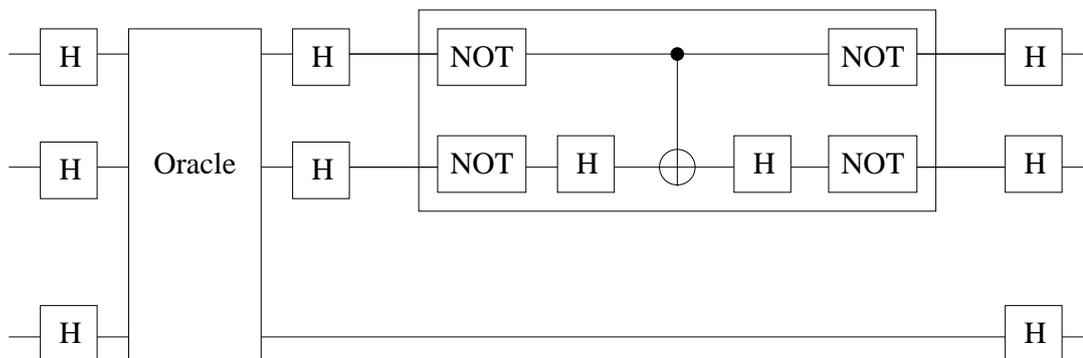
Remarquez que cet opérateur agit comme :

$$\begin{aligned} |00\dots 0\rangle &\rightarrow -|00\dots 0\rangle \\ |b_1 b_2 \dots b_n\rangle &\rightarrow |b_1 b_2 \dots b_n\rangle \text{ si } (b_1 b_2 \dots b_n) \neq (00\dots 0) \end{aligned}$$

Montrez que pour  $n = 2$  (le cas présent) cet opérateur peut être réalisé par le circuit suivant :



4. Prenez le circuit de l'algorithme de Grover pour  $N = 4$  et donnez l'état quantique à chaque étape. Faites une représentation géométrique de l'état (dans un espace à 2 dimensions approprié). Confirmez que l'état final donne bien la réponse  $x_0$  voulue et que l'on a posé une seule question à l'oracle.



**Exercice 2** *Identité utile pour la réalisation expérimentale de la porte CNOT par RMN*

Dans cet exercice nous prouvons une identité utile à la réalisation expérimentale de la porte CNOT. Elle formera la base de la discussion du cours, concernant la réalisation expérimentale par RMN des algorithmes de Deutsch-Josza et de Shor (pour 7 à 10 qubits).

On considère deux qubits (par exemple : spins 1/2, systèmes à deux niveaux) et les opérateurs suivants :

- Rotations d'angle  $\frac{\pi}{2}$  autour de l'axe  $z$  pour chaque spin :

$$R_1 = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1^z}{2}\right) \text{ et } R_2 = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_2^z}{2}\right)$$

- Porte de Hadamard  $H$ .
- L'opérateur d'évolution

$$U = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}\right)$$

associé à l'hamiltonien d'interaction pour deux spins  $\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$ . On laisse évoluer le système pendant un temps  $t = \frac{\pi}{4J}$ .

1. Dessinez le circuit correspondant au produit des matrices

$$(I_{2 \times 2} \otimes H) U (R_1 \otimes R_2) (I_{2 \times 2} \otimes H)$$

puis calculez ce produit et montrez qu'il est égal à la matrice  $4 \times 4$  de la porte CNOT