1

Corrigé : Test.

Exercice 1.

1.a) $\mathbb{1} \otimes CU |x, y, z\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes U^{y} |z\rangle$.

$$(CNOT \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes CU)|xyz\rangle = |x\rangle \otimes |y \oplus x\rangle \otimes U^{y}|z\rangle$$

$$(\mathbb{1} \otimes CU^{+})(CNOT \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes CU)|xyz\rangle = |x\rangle \otimes |y \oplus x\rangle \otimes (U^{+})^{x \oplus y} U^{y} |z\rangle$$

$$(CNOT \otimes \mathbb{1})(\quad\quad) = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes U^{+(x \oplus y)} U^{y} |z\rangle$$

* Dernier $CU(\;\cdots\;) = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes U^{x} U^{+(x \oplus y)} U^{y} |z\rangle$.

Notons que $U^{2xy} = U^{x} U^{+(x \oplus y)} U^{y}$. En effet

si $x = 1, y = 1$ on a $U^{2} = U (U^{+})^{0} U$

si $x = 1, y = 0$ $\quad U^{0} = U U^{+} U^{0}$.

si $x = 0, y = 1$ $\quad U^{0} = U^{0} U^{+} U$

si $x = 0, y = 0$ $\quad U^{0} = U^{0} (U^{+})^{0} U^{0}$.

cqfd.

1.b) Pour réaliser un CCNOT il faut prendre $U^{2} = NOT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $U = \sqrt{NOT}$. On peut vérifier que

$\cancel{\sqrt{NOT}\,2z}$ $\begin{pmatrix} 1 & +i \\ +i & 1 \end{pmatrix}^{2} = 2i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$\sqrt{NOT} = \frac{1}{\sqrt{2i}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

2.a Pour les matrices de rotation on a :

$$R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_x}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\,\sigma_x = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

$$R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_y}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\,\sigma_y = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & +1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc on aura :

$$R_x\left(\frac{\pi}{2}\right)|\uparrow\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle\right).$$

$$R_x\left(\frac{\pi}{2}\right)|\downarrow\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|\downarrow\rangle + i|\uparrow\rangle\right).$$

$$R_y\left(\frac{\pi}{2}\right)|\uparrow\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right).$$

$$R_y\left(\frac{\pi}{2}\right)|\downarrow\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle\right).$$

De plus pour $t = \frac{\pi}{4J}$:

$$\exp\left(-\frac{it}{\hbar}H\right) = \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\sigma_z\otimes\sigma_z\right).$$

Donc :

$$R_x\otimes R_x\,|\uparrow\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle\right)\otimes\left(|\downarrow\rangle + i|\uparrow\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + i|\uparrow\uparrow\rangle + i|\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right).$$

$$\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\sigma_z\otimes\sigma_z\right)R_x\otimes R_x\,|\uparrow\uparrow\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}|\uparrow\downarrow\rangle + i e^{-\frac{i\pi}{4}}|\uparrow\uparrow\rangle + i e^{-\frac{i\pi}{4}}|\downarrow\downarrow\rangle - e^{\frac{i\pi}{4}}|\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$= \frac{e^{i\pi/4}}{2}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right).$$

Appliquons la dernière relation pour trouver :

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\Big(|\uparrow\rangle\otimes(|\downarrow\rangle-|\uparrow\rangle) + |\uparrow\rangle\otimes(|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle)$$
$$+ |\downarrow\rangle\otimes(|\downarrow\rangle-|\uparrow\rangle) - |\downarrow\rangle\otimes(|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle)\Big).$$

$$= \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2}}\Big(2|\uparrow\downarrow\rangle - 2|\downarrow\uparrow\rangle\Big).$$

$$= e^{i\pi/4}\cdot\frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

2.b) <u>Preuve de l'intrication.</u>

Supposons $|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle = (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle)\otimes(\gamma|\uparrow\rangle + \delta|\downarrow\rangle)$

Alors il faut $1 = \alpha\delta$; $-1 = \beta\gamma$; $0 = \alpha\gamma$ et $0 = \beta\delta$.

~~tes~~ Les deux dernières equations entraînent

$$0 = \alpha\beta\gamma\delta$$

Mais les deux première entraînent

$$-1 = \alpha\beta\gamma\delta.$$

d'où une contradiction !

2.c) Les R_x sont réalisé avec $\frac{\pi}{2}$-pulses sur H puis sur C. L'év unitaire est faite ~~dans~~ par ~~[illegible]~~ l'int entre noyaux. Finalement on fait un $\frac{\pi}{2}$-pulse sur H ou C seulement. BlaBla ...

Exercice 3 :

a) $$H\,|0\rangle\otimes|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle\otimes|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\otimes|u\rangle.$$

$$CU\,H\,|0\rangle\otimes|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle\otimes|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{2\pi i\varphi}\,|1\rangle\otimes|u\rangle.$$

$$H\,CU\,H\,|0\rangle\otimes|u\rangle = \frac{1}{2}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)\otimes|u\rangle + \frac{e^{2\pi i\varphi}}{2}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)\otimes|u\rangle$$

$$= \frac{1+e^{2\pi i\varphi}}{2}\,|0\rangle\otimes|u\rangle + \frac{1-e^{2\pi i\varphi}}{2}\,|1\rangle\otimes|u\rangle.$$

$$= e^{\pi i\varphi}\left\{\cos\pi\varphi\,|0\rangle\otimes|u\rangle - i(\sin\pi\varphi)\,|1\rangle\otimes|u\rangle\right\}.$$

b) $\mathrm{Prob}(0) = \cos^2\pi\varphi$ et $\mathrm{Prob}(1) = \sin^2\pi\varphi$.

c) Si on applique U^k au lieu de U on trouve la sortie :

$$e^{i\pi k\varphi}\left\{\cos(\pi k\varphi)\,|0\rangle\otimes|u\rangle - i(\sin\pi k\varphi)\,|1\rangle\otimes|u\rangle\right\}.$$

Si $\varphi = \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2^2} + \dots \frac{\varphi_{t-1}}{2^{t-1}} + \frac{\varphi_t}{2^t}$ en prenant

$k = 2^{t-1}$ on observe 0 avec Prob

$$\mathrm{Prob}(0) = \cos^2\left(\pi\varphi_{t-1} + \frac{\pi\varphi_t}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi\varphi_t}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_t = 0 \\ 0 & \text{si } \varphi_t = 1. \end{cases}$$