

Série 4 Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Algorithme : probabiliste versus quantique*

Une matrice P_{kl} est dite stochastique si $0 \leq P_{kl} \leq 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} P_{kl} = 1$. Ici P_{kl} représente une probabilité de transition $l \rightarrow k$.

Soit U une matrice unitaire $n \times n$ et $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n-1\rangle$ une base orthonormée.

1. Montrez que $|\langle j|U|i\rangle|^2 = R_{ji}$ est une matrice stochastique. Notez que R_{ji} représente une probabilité d'observer la transition $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$ (postulat de la mesure) si on fait la mesure dans la base $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n-1\rangle$.
2. On considère le processus de calcul stochastique classique donné par la figure 1.

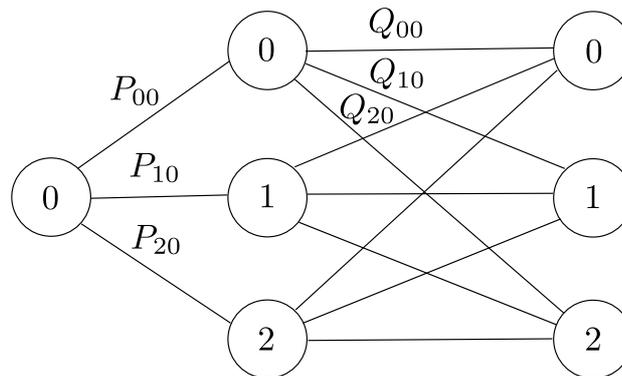


FIG. 1 – processus classique

On initialise le registre d'entrée dans l'état 0. Lors de la première étape, l'état transite vers 0, 1, 2 avec probabilité P_{j0} . Lors de la deuxième étape, l'état transite vers 0, 1, 2 avec probabilité Q_{kj} . Calculez la probabilité d'observer l'état 2 à la sortie.

3. On considère l'analogue quantique de la figure 2. Ici le registre peut être dans 3 états quantiques $|0\rangle, |1\rangle$ et $|2\rangle$. La première étape de calcul est décrite par une matrice d'évolution unitaire U_1 et la deuxième étape par U_2 . On suppose que $|\langle j|U_1|i\rangle|^2 = P_{ji}$ et $|\langle j|U_2|i\rangle|^2 = Q_{ji}$.
 - Calculez la probabilité d'observer l'état $|2\rangle$ à la sortie si l'état d'entrée est $|0\rangle$. Comparez le résultat avec le cas classique.
 - Supposons que l'on fasse une mesure intermédiaire après la première étape. Quelle est la probabilité d'observer l'état final $|2\rangle$ à la sortie, si l'état initial est $|0\rangle$. Y-a-t'il une différence avec le cas classique?

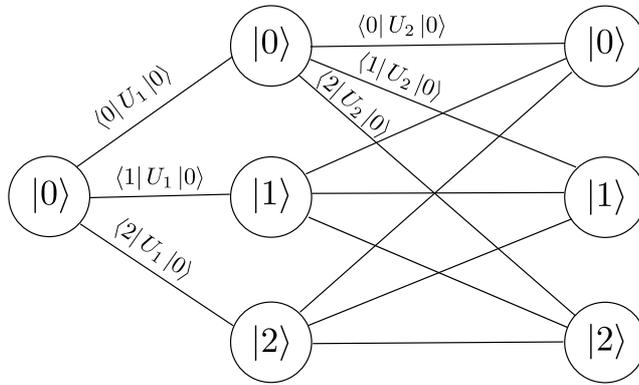


FIG. 2 – processus quantique

Exercice 2 *Vérification pour bonne compréhension si besoin est*

On adopte la notation $|b\rangle$, $|c\rangle$ pour les états de la base canonique $|1\rangle$, $|0\rangle$ (c.à.d. que $b = 0, 1$ et $c = 0, 1$). Vérifiez que

$$\begin{aligned} H|b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + (-1)^b |1\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{c=0}^1 (-1)^{bc} |c\rangle \end{aligned}$$

et vérifiez pour $n = 2$ et 3

$$H^{\otimes n} |0_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_2^n} (-1)^{\sum_{i=1}^n b_i c_i} |c_1, \dots, c_n\rangle$$

et ensuite le cas général.

Exercice 3 *Algorithme de Simon*

Détaillez les calculs du cours de l'algorithme de Simon pour $n = 2$ et le sous-espace vectoriel de dimension 1

$$H = \{(0, 0); (1, 0)\}$$

"caché" dans le "carré binaire"

$$\mathbb{F}_2^n = \{(0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1)\}$$

En d'autres termes on dispose d'un Oracle qui retourne deux valeurs distinctes pour une fonction $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow X$ (où X possède deux éléments) telle que $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$ si et seulement si $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ ou $(x_1, x_2) - (y_1, y_2) = (1, 0)$. Le but est de trouver le vecteur $(1, 0)$ (c'est le vecteur de base du sous-espace caché H).