# Série 3
# Traitement quantique de l'information II

**Exercice 1** *Variation sur le problème de Deutsch-Josza*

En 1993 E. Bernstein et U. Vazirani (Proc, 25th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, ACM Press, NY p11-20) formulèrent le problème suivant. On se donne un "oracle" qui calcule

$$f\left(\underline{x}\right) = \underline{a} \cdot \underline{x} \oplus b \mod 2$$

pour chaque entrée $\underline{x} \in \mathbb{F}_2^n$. Ici $\underline{a} \in \mathbb{F}_2^n$ et b$\in \mathbb{F}_2$. Le but est de calculer $\underline{a}$ en posant le moins de questions possibles à l'oracle.

1. Combien de questions faut-il poser à l'oracle pour déterminer $\underline{a}$ classiquement ?
2. Montrez que
$$\sum_{\underline{x} \in \mathbb{F}_2^n} (-1)^{\underline{x} \cdot \underline{z}} = \begin{cases} 2^n & \text{si } \underline{z} = (0,0,...,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
3. En utilisant le point précédent montrez que grâce au circuit de Deutsch-Josza, il suffit de poser une seule question à "l'oracle quantique" pour déterminer $\underline{a}$.

**Exercice 2** *Résonance Magnétique Nucléaire*

Dans un échantillon de volume $V$, on aimerait déterminer la densité $\rho = \frac{N}{V}$ d'un certain type de molécules qu'il contient. Ici $N$ est le nombre total de ces molécules dans l'échantillon. En RMN on agit sur les moments magnétiques de certains noyaux d'atomes constituant ces molécules. On admettra que le problème revient á déterminer le nombre de moments magnétiques nucléaires.

Pour ce faire on soumet tout d'abord l'échantillon à un fort champ magnétique $\vec{B}_0$ dirigé sur l'axe $z$ (par convention). L'Hamiltonien pour un moment magnétique $\vec{\mu} = \frac{g\hbar}{2}\vec{\sigma}$ (le facteur gyromagnétique $g$ est une constante cactérisant les noyaux sur lesquels on agit) peut s'écrire comme

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 = -\hbar\omega_0\sigma_z$$

où $\omega_0 = gB_0/2$. Les valeurs propres de l'Hamiltonien (les niveaux d'énergies possibles) sont égales à $E_\uparrow = -\hbar\omega_0$, $E_\downarrow = +\hbar\omega_0$ et leurs vecteurs propres associés sont $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$.

1. Une fois le champ magnétique $\vec{B}_0$ enclenché, l'échantillon va progressivement se thermaliser. Une fois l'équilibre thermique atteint, une quantité de moments magnétiques $N_\uparrow$ se trouvera dans l'état propre d'énergie $E_\uparrow$ et le reste des moments magnétiques $N_\downarrow$ sera dans l'état d'énergie $E_\downarrow$. Exprimez $N_\uparrow$ et $N_\downarrow$ en fonction de $N$ et $\hbar\omega_0$, sachant

qu'à l'équilibre thermique, la fraction de moments magnétiques dans l'état d'énergie $E_i$ est proportionnelle à

$$e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

où $k$ est la constant de Boltzmann et $T$ la température.

2. L'observable aimantation pour un moment magnétique est $\vec{\mu} = \frac{g\hbar}{2}\vec{\sigma}$ oú $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Calculez la valeur moyenne de l'aimantation pour une particule du groupe $N_\uparrow$ et celle du groupe $N_\downarrow$. Puis calculez l'aimantation macroscopique totale $\vec{M}$ de l'échantillon (où l'on suppose que l'aimantation totale de l'échantillon est donnée par l'addition de l'aimantation moyenne de chaque moment magnétique).
3. A présent on fait subir à l'échantillon un $\frac{\pi}{2}$-pulse. C'est à dire qu'on enclenche un champ magnétique $\vec{B}_1(t)$ tournant dans le plan $xy$ à la fréquence de résonance $\omega = \omega_0$ pendant un temps $t = \frac{\pi}{2\omega_1}$ (où $\omega_1 = gB_1/2$). En cours il a été démontré que ce processus est équivalent à une porte Hadamard i.e.

$$|\uparrow\rangle \longmapsto |+\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$
$$|\downarrow\rangle \longmapsto |-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

Pour les temps $t > \frac{\pi}{2\omega_1}$ on arrête le champ $\vec{B}_1(t)$ et seul le champ $\vec{B}_0$ reste actif. Rappeler et écrire comment les états initialement $|+\rangle$ et $|-\rangle$ vont évoluer au cours du temps et calculez l'aimantation totale $\vec{M}(t)$ pour des temps $t > \frac{\pi}{2\omega_1}$.
4. Par la suite, on place une bobine électrique de section $S$, possédant $n$ spires, et résistance $R$, autour de l'échantillon dans le plan $xy$ et orientée dans la direction $y$. Trouvez l'expression du courant électrique $I(t)$ induit dans la bobine. On rappelle la loi de Faraday pour la tension induite induite

$$U(t) = -n\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}$$

où le flux $\Phi(t) = \vec{S}\cdot\vec{M}$.
5. Effectuez la transformée de Fourier du courant (signal) $I(t)$ et dessinez cette fonction. On rappelle que la transformée de Fourier de $\cos\omega_0 t$ est égale à

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

6. En pratique le signal est atténué car il y a des processus de re-thermalisation des moments magnétiques nucléaires, et le système va retourner vers l'équilibre thermique sur une échelle de temps $\tau$. Le signal réel $I_r(t)$ peut s'écrire comme $I_r(t) = I(t)\,e^{-|t|/\tau}$. Calculez la transformée de Fourier de $I_r(t)$ et dessinez cette fonction. On rappelle que la transformée de Fourier de $e^{-|t|/\tau}$ est égale à

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2}$$