Série 11
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1

On considère un système S couplé à un environnement $\mathcal{E}$. L'espace de Hilbert total est $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, où $\mathcal{H}_s$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ sont deux copies de $\mathbb{C}^2$. On suppose que l'environnement est initialement dans l'état pur $|0\rangle$ et que le système S est dans un état mixte quelconque ρ_s. Calculer la matrice densité du système S après évolution du système total $S \cup \mathcal{E}$ pour les deux opérateurs d'évolution

a) $U = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$

b) $U = \frac{X}{\sqrt{2}} \otimes I + \frac{Y}{\sqrt{2}} \otimes X$
   où X et Y sont les deux matrices de Pauli.

c) Donnez les opérateurs de Kraus et vérifiiez qu'il satisfait bien à la condition nécessaire vue en cours.

Exercice 2

Considérez les canaux bit-flip ; phase-flip ; bit & phase flip et dépolarisant vus au cours et donner leur représentation en terme de la sphère de Bloch.

Exercice 3

On considère le cannal dépolarisant

$$\mathcal{E}(\rho) = p\frac{I}{2} + (1-p)\rho$$

Avec probabilité p le qubit est dépolarisé, c'est-à-dire transformé dans l'état complétement mélangé $\frac{I}{2}$, et avec probabilité $(1-p)$ le qubit reste inchangé. Le but de cet exercice est de montrer que ce cannal est identique au cannal suivant

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p')\rho + \frac{p'}{3}(X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z)$$

où $p = \frac{4}{3}p'$.

a) Montrez la relation suivante, valable pour toute matrice densité ρ :

$$\frac{I}{2} = \frac{\rho + X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z}{4}$$

Astuce : utilisez la représentation $\rho = \frac{I}{2} + \vec{N}\cdot\vec{\sigma}$

b) Dans la définition du cannal dépolarisant, remplacez le terme $\frac{I}{2}$ par la formule trouvée en a) et effectuez le changement de parametrisation $p = \frac{4}{3}p'$.