BRUIT - DECOHERENCE et CANAUX en MQ.

Dans ce chapitre nous étudions comment modéliser les effets des perturbations de l'environnement sur un système. Ces perturbations ne sont rien d'autre que ce que l'on nomme communément "bruit". Du point de vue physique leur effet le plus important est la dé-cohérence induite sur les états quantiques du système. Pour introduire ces notions nous aurons besoin du formalisme de la matrice densité exposé ci-dessous.

1. Formalisme de la matrice Densité.

Jusqu'à maintenant nous avons décrit les états d'un système (isolé) par les vecteurs (kets) de l'espace d'Hilbert. Si $|\psi\rangle$ est un état et A une observable mesurée avec $A = \sum_n \alpha_n |n\rangle\langle n| = \sum_n \alpha_n P_n$ pour sa décomposition spectrale, le postulat de la mesure nous dit que la probabilité d'obtenir $|n\rangle$ ou α_n comme résultat de la mesure est

$$\text{Prob}(m) = |\langle m|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|m\rangle\langle m|\psi\rangle = \langle\psi|P_m|\psi\rangle$$

et
$$\langle A\rangle = \sum_m \alpha_m \langle\psi|P_m|\psi\rangle = \langle\psi|\sum_m \alpha_m P_m|\psi\rangle$$
$$= \langle\psi|A|\psi\rangle.$$

Ces formules peuvent se réécrire en introduisant la notion de "Trace d'une matrice":

$$\text{Prob}(m) = \text{Tr}\ P_m |\psi\rangle\langle\psi| \quad \text{et} \quad \langle A\rangle = \text{Tr}\ A |\psi\rangle\langle\psi|.$$

(Rappel de Math :

$\text{Tr}\, A = \sum_i a_{ii}$ — Définition.

$\text{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\, \text{Tr}\, A + \beta\, \text{Tr}\, B.$ — Linéarité

$\text{Tr}\ AB = \text{Tr}\ BA$ — Cyclicité.

Notez que la cyclicité entraîne l'invariance de la trace sous les changements de base (p. ex sous les transf. unitaires))

Ainsi le système dans l'état $|\psi\rangle$ peut aussi bien être décrit par la matrice $|\psi\rangle\langle\psi|$ (qui ici est un projecteur).

Ce point de vue a l'avantage de se prêter à la générali-
-sation suivante. Considérons une source émettant des
atomes (ou qubits) <u>dans des états</u>

$$|\varphi_1\rangle \; ; \; |\varphi_2\rangle \; \ldots \; |\varphi_K\rangle \; \ldots$$

avec <u>probabilités classiques</u> (fraction d'atomes dans l'état $|\varphi_K\rangle$).

$$q_1 \; ; \; q_2 \; \ldots \; q_K \; \ldots$$

Faisons une mesure de l'observable A pour un atome
émis par la source. Si l'atome est dans l'état $|\varphi_K\rangle$
la probabilité d'observer $|m\rangle$ est $|\langle m|\varphi_K\rangle|^2$, donc

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(m) &= \sum_K \text{Prob}(K \text{ soit émis}) \; \text{Prob}(\text{obs } m \,|\, K \text{ est émis}) \\
&= \sum_K q_K \, |\langle m|\varphi_K\rangle|^2 \\
&= \sum_K q_K \; \text{Tr} \; |\varphi_K\rangle\langle\varphi_K| \, P_m \\
&= \text{Tr} \left(\sum_K q_K \, |\varphi_K\rangle\langle\varphi_K| \right) P_m \, .
\end{aligned}$$

De plus

$$\langle A \rangle = \sum_m \alpha_m \, \text{Prob}(m) = \text{Tr} \left(\sum_K q_K \, |\varphi_K\rangle\langle\varphi_K| \right) A$$

Il est alors naturel d'introduire la quantité

$$\rho = \sum_K q_K \, |\varphi_K\rangle\langle\varphi_K|$$

appelée "matrice densité". Puisque $0 \leq q_k \leq 1$ et $\sum_k q_k = 1$, il s'agit d'une combinaison convexe de projecteurs. Cette matrice densité décrit entièrement la source et la mesure d'une observable donne

$$\mathrm{Prob}(m) = \mathrm{Tr}\, \rho P_m = \mathrm{Tr}\, P_m \rho =$$

$$\text{et} \quad \langle A \rangle = \mathrm{Tr}\, \rho A = \mathrm{Tr}\, A \rho .$$

La matrice ρ est hermitienne car

$$\rho^\dagger = \sum_k \bar{q}_k \left(|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| \right)^\dagger = \sum_k q_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| .$$

La matrice ρ est semi-définie positive car $\forall |v\rangle \in \mathcal{H}$

$$\langle v|\rho|v\rangle = \sum_k q_k \langle v|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|v\rangle$$
$$= \sum_k q_k |\langle v|\varphi_k\rangle|^2 \geq 0 .$$

Sa trace vaut 1 car

$$\mathrm{Tr}\,\rho = \sum_k q_k \mathrm{Tr}\, |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| = \sum_k q_k \mathrm{Tr}\, \langle\varphi_k|\varphi_k\rangle$$
$$= \sum_k q_k \langle\varphi_k|\varphi_k\rangle$$
$$= \sum_k q_k = 1 .$$

Nous adoptons maintenant le point de vue suivant : (dû à Von Neumann) L'état le plus général d'un système quantique est donné par une matrice densité ρ. Une matrice densité est une matrice $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ qui satisfait les trois propriétés ci-dessus (hermitienne, positive et de trace unité). Toute matrice densité est une combinaison convexe de projecteurs (pour le voir il suffit de considérer la décomposition spectrale). Néanmoins il faut garder à l'esprit que cette décomposition n'est pas unique.

Evolution unitaire

Puisque chaque état $|\varphi_k\rangle$ évolue comme $|\varphi_k(t)\rangle = U_t |\varphi_k(0)\rangle$ la matrice densité évolue comme :

$$\rho(t) = \sum_k q_k \, U_t |\varphi_k(0)\rangle\langle\varphi_k(0)| U_t$$

$$= U_t \, \rho(0) \, U_t .$$

Postulat de la mesure.

Si l'état est $|\varphi_k\rangle$ (ceci a lieu avec prob q_k) la mesure projette sur $|m\rangle$ qui correspond à la matrice densité $|m\rangle\langle m| = P_m$. Donc après la mesure la matrice densité sera

$$\rho_{\text{après}} = \sum_k q_k \, |m\rangle\langle m| = |m\rangle\langle m|$$

Cette formule peut aussi s'écrire

$$\rho_{\text{après}} = \frac{P_m \rho P_m}{\mathrm{Tr}(P_m \rho)} . \qquad (*)$$

En effet $P_m \rho P_m = |m\rangle\langle m|\rho|m\rangle\langle m|$ et

$$\mathrm{Tr}(P_m\rho) = \mathrm{Tr}\, |m\rangle\langle m|\rho = \mathrm{Tr}\, \langle m|\rho|m\rangle = \langle m|\rho|m\rangle .$$

(L'avantage de (*) est qu'elle est encore valable si P_m est de dimension supérieure à 1).

Ainsi le postulat de la mesure est inchangé : une mesure projette l'état sur un vecteur de base de l'appareil de mesure

$$\rho_{\text{après}} = |m\rangle\langle m| = \frac{P_m \rho P_m}{\mathrm{Tr}\, P_m \rho}$$

avec $\mathrm{prob}(m) = \mathrm{Tr}\, P_m \rho$.

Exemple : source thermique.

Prenons des spins dans un champ magnétique $\vec{B}_0 \parallel z$ à l'équilibre thermique à température T. Chaque spin possède deux états d'énergie $E_\uparrow = -\frac{\hbar\omega_0}{2}$ et $E_\downarrow = +\frac{\hbar\omega_0}{2}$. D'après la loi de Maxwell-Boltzmann-Gibbs

$$\mathrm{prob}(\uparrow) = \frac{\exp -(E_\uparrow / k_B T)}{Z}$$

$$\mathrm{prob}(\downarrow) = \frac{\exp -(E_\uparrow / k_B T)}{Z}$$

où k_B est la constante de Boltzmann ($k_B T$ a l'unité d'une énergie et T celle d'une température) et Z est un facteur qui sert à normaliser les probabilités :

$$Z = \exp\left(-\frac{E_\uparrow}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{E_\downarrow}{k_B T}\right).$$

L'état thermique est décrit par la matrice densité

$$\rho_{\mathrm{therm}} = \frac{1}{2\cosh\left(\frac{\hbar\omega_0}{2k_B T}\right)} \left(e^{\frac{\hbar\omega_0}{2k_B T}} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + e^{-\frac{\hbar\omega_0}{2k_B T}} |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \right).$$

Si on applique un champ de RF (comme dans les expériences de RMN) on peut calculer l'évolution temporelle de cet état $U(t)\,\rho\,U(t)^{+}$ et à partir de la l'évolution des propriétés de spins ↑ et ↓.

Notons qu'un défi pour l'information quantique consiste à transformé l'état thermique ci dessus pour n qubits

$$\underbrace{\rho_{therm} \otimes \rho_{therm} \otimes \ldots \otimes \rho_{therm}}_{n \text{ fois}}$$

en un état

$$\underbrace{|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes \ldots \otimes |\uparrow\rangle}_{n \text{ fois}}$$

permettant d'initialiser les algorithmes quantiques.

Matrices Densité 2 × 2.

Toute matrice 2×2 t.q $\rho = \rho^\dagger$ et $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$ peut s'écrire

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & -a \end{pmatrix}.$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On veut encore $\rho \geq 0$ ce qui signifie λ_1 et $\lambda_2 \geq 0$ (les deux valeurs propres). On ne peut pas avoir λ_1 et $\lambda_2 < 0$ car $\mathrm{Tr}\,\rho = \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Donc il suffit d'assurer $\lambda_1 \lambda_2 \geq 0$. Mais

$$\lambda_1 \lambda_2 = \mathrm{Det}\,\rho = \frac{1}{4}\{(1+a)(1-a) - (b+ic)(b-ic)\}$$
$$= \frac{1}{4}\{1 - a^2 - b^2 - c^2\}.$$

Ainsi il faut prendre $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$. Le lecteur remarquera que

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z\right).$$

Ainsi nous avons prouvé :

Théorème : L'ensemble des matrices densité 2×2 est de la forme $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{v}\cdot\vec{\sigma})$ avec $\|\vec{v}\| \leq 1$.

C'est une boule de rayon 1.

Les matrices densités avec $\|\vec{v}\| = 1$ ont un statut particulier. On peut vérifier que si $\|\vec{v}\| = 1$ $\rho^2 = \rho$.

En effet

$$\rho^2 = \frac{1}{4}\Big(\mathbb{1} + 2\vec{v}.\vec{\sigma} + v_x^2\sigma_x^2 + v_y^2\sigma_y^2 + v_z^2\sigma_z^2$$
$$+ v_x v_y (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x)$$
$$+ v_x v_z (\sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + v_y v_z (\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y)\Big)$$
$$= \frac{1}{4}\Big(\mathbb{1} + 2\vec{v}.\vec{\sigma} + \underbrace{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}_{1}\Big)$$
$$= \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{v}.\vec{\sigma}) = \rho .$$

Ces états sont en fait des projecteurs $|\psi\rangle\langle\psi|$. Ainsi les vecteurs $\vec{v}$, $\|\vec{v}\|=1$ sur la surface de la sphère de Bloch représentent les kets usuels de l'espace d'Hilbert. On les appelle "états purs".

Note : On montre que l'ensemble des matrices densité possibles d'un système est convexe et que les points extrémaux (qui ne sont pas des combinaisons convexes non-triviales) sont des projecteurs.

2) Notion de trace partielle.

Considérons un système composé (p. ex 2 qubits) avec espace d'Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Si la base de $\mathcal{H}_1$ est $\{|\varphi_i^{(1)}\rangle\}$ et celle de $\mathcal{H}_2$ $\{|\varphi_j^{(2)}\rangle\}$ alors une base de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ est

$$|\varphi_i^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_j^{(2)}\rangle \qquad i = 1 \ldots n \, ; \, j = 1 \ldots m.$$

Notez la dimension totale de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ est nm. La trace d'une observable $\mathcal{O}$ est égale à la somme des éléments diagonaux (et celle-ci ne dépend pas de la base)

$$\mathrm{Tr}\, \mathcal{O} = \sum_{i,j} \langle \varphi_i^{(1)} | \otimes \langle \varphi_j^{(2)} | \, \mathcal{O} \, | \varphi_i^{(1)} \rangle \otimes | \varphi_j^{(2)} \rangle .$$

Cette trace peut encore s'écrire de deux façons différentes suivant que l'on fait les sommes dans l'ordre $\sum_i \sum_j$ ou $\sum_j \sum_i$. On a :

$$\mathrm{Tr}\, \mathcal{O} = \sum_i \langle \varphi_i^{(1)} | \underbrace{\Big(\sum_j \langle \varphi_j^{(2)} | \mathcal{O} | \varphi_j^{(2)} \rangle \Big)} | \varphi_i^{(1)} \rangle$$

$$= \mathrm{Tr}_1 \left(\mathrm{Tr}_2\, \mathcal{O} \right).$$

Ici Tr_2 est une trace partielle sur le deuxième espace. $(Tr_2\, \rho)$ est une matrice agissant sur le premier espace, dont on peut prendre la trace $Tr_1(Tr_2\, \rho)$ pour obtenir la trace totale $Tr\, \rho$.

De façon similaire on a aussi :

$$Tr\, \rho = \sum_j \langle \varphi_j^{(2)} | \left(\sum_i \langle \varphi_i^{(1)} | \rho | \varphi_i^{(1)} \rangle \right) | \varphi_j^{(2)} \rangle$$

$$= Tr_2\, (Tr_1\, \rho).$$

<u>Exemple</u> : Considérons $\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} d & e \\ \bar{e} & f \end{pmatrix}$

et vérifier explicitement ces formules.

- $Tr_2\, \rho = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \cdot (d+f)$

  $Tr_1(Tr_2\, \rho) = (a+c)(d+f) = ad + af + cd + cf.$

- $Tr_1\, \rho = (a+c) \cdot \begin{pmatrix} d & e \\ \bar{e} & f \end{pmatrix}$

  $Tr_2(Tr_1\, \rho) = (a+c)(d+f) = ad + af + cd + cf.$

- $\rho = \left(\begin{array}{cc|cc} ad & ae & bd & be \\ a\bar{e} & af & b\bar{e} & bf \\ \hline \bar{b}d & \bar{b}e & cd & ce \\ \bar{b}\bar{e} & \bar{b}f & c\bar{e} & cf \end{array}\right)$ et $Tr\, \rho = ad + af + cd + cf$. !

3) Matrice Densité Réduite.

Dans le paragraphe 1, nous avons vu que la matrice densité permet de décrire l'état statistique d'une source (p. exemple). Ici nous allons montrer que les matrices densité permettent aussi de décrire l'état d'un système unique.

Soit S un "système d'intérêt" et $\mathcal{U}$ "l'univers" dans lequel S est plongé. La partie $\mathcal{U} \setminus S$ est appelée l'environnement de S et sera aussi notée $\mathcal{E}$. Nous supposons que $\mathcal{U}$ est dans un état pur $|\psi\rangle$ qui vit dans l'espace d'Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{U}} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. L'état pur $|\psi\rangle$ correspond à une matrice densité $|\psi\rangle\langle\psi|$ (un projecteur) et la valeur moyenne d'une observable $\mathcal{O}$ de l'univers est donnée par

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \mathrm{Tr}_{\mathcal{U}}\, \mathcal{O}\, |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Maintenant si on s'intéresse uniquement à des observables de S, c.a.d de la forme $\mathcal{O} = A \otimes \mathbb{1}$ on a :

$$\langle A \otimes \mathbb{1} \rangle = \mathrm{Tr}_{\mathcal{U}}\, A \otimes \mathbb{1}\, |\psi\rangle\langle\psi| = \mathrm{Tr}_S\, \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\, A \otimes \mathbb{1} |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$= \mathrm{Tr}_S\, A \left(\mathrm{Tr}_\mathcal{E} |\psi\rangle\langle\psi| \right).$$

Il est donc naturel d'introduire la "matrice densité réduite"

$$\rho_S = \mathrm{Tr}_\mathcal{E} |\psi\rangle\langle\psi|$$

obtenue en éliminant (en traçant) les degrés de liberté de l'environnement. Grâce à ρ_S on peut calculer

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}_S\, A\rho_S = \mathrm{Tr}_S\, \rho_S A.$$

Exemples.

1) Si $|\psi\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$ alors

$$|\psi\rangle\langle\psi| = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| \otimes |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$$

et $$\rho_1 = \mathrm{Tr}_2 |\psi\rangle\langle\psi| = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| \underbrace{\mathrm{Tr}_2 |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|}_{\mathrm{Tr}\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle = 1}.$$

$$\rho_2 = \mathrm{Tr}_1 |\psi\rangle\langle\psi| = |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| \underbrace{\mathrm{Tr}_1 |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|}_{1}.$$

$$= |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|.$$

Ici $|\psi\rangle$ est un produit tensoriel de $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$. Il n'y a aucune corrélation entre 1 & 2 et les états partiels sont $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$

2) Soit $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ un état intriqué entre Alice et Bob.

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\left(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right)$$

$\mathrm{Tr}_2\, \rho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ et idem pour $\mathrm{Tr}_1\, \rho$.

Ainsi la description locale est un état totalement désordonné.

4) Modèles de Bruit en MQ.

Pour nous le "bruit" est l'effet de l'environnement sur un système. On s'intéresse uniquement au système et on veut une description effective du système qui incorpore l'effet de l'environnement comme du "bruit".

Soit S dans l'état initial $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, et l'environnement $\mathcal{E}$ dans l'état initial $|E\rangle\langle E|$. L'état total est initialement totalement décorrélé :

$$|\varphi\rangle\langle\varphi| \otimes |E\rangle\langle E| .$$

A l'instant t (ultérieur) l'état total sera :

$$U_t\, |\varphi\rangle\langle\varphi| \otimes |E\rangle\langle E|\, U_t^{+}$$

Ici l'opérateur d'évolution va introduire un couplage non-trivial entre S et $\mathcal{E}$ et l'état total ne sera plus un produit tensoriel mais sera intriqué.
Néanmoins, nous voulons une description de S seulement. Celle-ci est donnée par la matrice densité réduite : (U_t = op d'év du système total $S \cup \mathcal{E}$).

$$\rho_S(t) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\, U_t\, |\varphi\rangle\langle\varphi| \otimes |E\rangle\langle E|\, U_t^+$$

$$= \sum_K \langle\varphi_K|\, U_t\, |\varphi\rangle\langle\varphi| \otimes |E\rangle\langle E|\, U_t^+\, |\varphi_K\rangle$$

où $\{|\varphi_K\rangle\}$ est une base de $\mathcal{E}$. Cette dernière formule se réécrit comme :

$$\rho_S(t) = \sum_K \langle\varphi_K| U_t |E\rangle \big(|\varphi\rangle\langle\varphi|\big) \langle E| U_t^+ |\varphi_K\rangle$$

où $\langle\varphi_K| U_t |E\rangle \equiv E_K$ et $\langle E| U_t^+ |\varphi_K\rangle = E_K^+$ sont des matrices dans S.

Les matrices $\{E_K\}$ satisfont à la propriété importante

$$\sum_K E_K^+ E_K = \mathbb{1}_S \,.$$

(En effet

$$\sum_K E_K^+ E_K = \sum_K \langle E| U_t^+ |\varphi_K\rangle\langle\varphi_K| U_t |E\rangle$$

$$= \langle E| U_t^+ \sum_K |\varphi_K\rangle\langle\varphi_K| U_t |E\rangle$$

$$= \langle E | U_t^+ \mathbb{1}_E U_t | E \rangle$$

$$= \langle E | U_t^+ U_t | E \rangle$$

$$= \langle E | \mathbb{1}_S \otimes \mathbb{1}_E | E \rangle = \mathbb{1}_S \cdot \langle E | \mathbb{1}_E | E \rangle$$

$$= \mathbb{1}_S \langle E | E \rangle$$

$$= \mathbb{1}_S . \quad \Big) .$$

Ces considérations nous montrent que l'effet du bruit est modélisé par des transformations :

$$\mathcal{E} : \mathrm{Mat}(\mathcal{H}_S \to \mathcal{H}_S) \longrightarrow \mathrm{Mat}(\mathcal{H}_S \to \mathcal{H}_S)$$

$$\rho_S \mapsto \mathcal{E}(\rho_S) = \rho_S' = \sum_k E_k \rho_S E_k^+$$

pour un ensemble de matrices E_k t.q

$$\sum_k E_k^+ E_k = \mathbb{1}_S .$$

Théorème de représentation de Kraus.

a) Soit $\mathcal{E}$ une transformation comme ci-dessus. Si ρ est une matrice densité, alors $\rho' = \mathcal{E}(\rho)$ est aussi une matrice densité.

b) Soit $\mathcal{E}$ t.q $\mathcal{E}(\rho)$ soit une matrice densité quand ρ est elle-même une matrice densité. Alors il $\exists$ des matrices E_k qui représentent $\mathcal{E}$ comme ci-dessus.

- La preuve de a) est facile. En effet l'expression de ρ_S' montre que $\rho_S'^{\dagger} = \rho_S'$ car $\rho_S^{\dagger} = \rho_S$ et $\rho_S' \geq 0$ car $E_k \rho_S E_k^{\dagger} \geq 0$ puisque $\rho_S \geq 0$.

(puisque $\langle w | E_k \rho_S E_k^{\dagger} | w \rangle \geq 0$ si $\langle w | \rho_S | w \rangle \geq 0 \ \forall w$).

De plus
$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, \rho_S' &= \sum_k \mathrm{Tr} (E_k \rho_S E_k^{\dagger}) \\ &= \sum_k \mathrm{Tr}\, \rho_S E_k^{\dagger} E_k \\ &= \mathrm{Tr}\, \rho_S \underbrace{\sum_k E_k^{\dagger} E_k}_{\mathbb{1}_S} = \mathrm{Tr}\, \rho_S = 1 . \end{aligned}$$

- La réciproque b) est plus dur à prouver et nous le faisons pas ici. Mais l'idée principale consiste à dire que si $\mathcal{E}(\rho)$ est une matrice densité, elle peut être obtenue comme Trace Partielle sur un espace plus grand que S (c'est ce point qui est non trivial : toute matrice densité provient de la trace partielle d'un certain état pur). Ensuite on procède comme avant et on construit les opérateurs E_k et $E_k^{\dagger}$ explicitement.

Remarque : Les opérations du type $\mathcal{E}$ s'appellent "completely positive maps" et on peut montrer que ce sont les opérations les plus générales possibles que l'on peut faire sur une Matrice Densité en MQ.

Cas particulier d'opérations $\mathcal{E}$.

- Evolution unitaire $\rho' = U \rho U^+$ où $U^+ U = \mathbb{1}$

  donc $U = \{E_k\}$.

- Mesure sans observation de l'état final.

$$\rho \longrightarrow \rho' = \sum_m \hat{P}_m \, \rho \, \hat{P}_m \qquad (*)$$

Ici $\sum_m \hat{P}_m^+ \hat{P}_m = \sum_m \hat{P}_m = \mathbb{1}$ donc $\{E_k\} = \{\hat{P}_m\}$.

Justifions (*) : Soit $|\psi\rangle\langle\psi|$ un état mesuré dans la base $\{\hat{P}_m\}$. On obtient

$$\frac{\hat{P}_m |\psi\rangle\langle\psi| \hat{P}_m}{\operatorname{Tr} \hat{P}_m |\psi\rangle\langle\psi| \hat{P}_m} \qquad \text{avec prob} = \operatorname{Tr}(\hat{P}_m |\psi\rangle\langle\psi| \hat{P}_m)$$

Donc la matrice densité après la mesure est :

$$\sum_m \operatorname{Tr}(\hat{P}_m |\psi\rangle\langle\psi| \hat{P}_m) \cdot \frac{\hat{P}_m |\psi\rangle\langle\psi| \hat{P}_m}{\operatorname{Tr} \hat{P}_m |\psi\rangle\langle\psi| \hat{P}_m}$$

$$= \sum_m \hat{P}_m |\psi\rangle\langle\psi| \hat{P}_m .$$

Ces formules sont valables aussi si on remplace $|\psi\rangle\langle\psi|$ par ρ général.

Remarque ! quand on observe le résultat d'une unique mesure on a un des états

$$\frac{P_m \rho P_m}{\mathrm{Tr}\, P_m \rho P_m}$$

qui n'est pas de la forme $\sum_k E_k \rho E_k^+$ avec $\sum_k E_k^+ E_k = 1$.

En dernière analyse c'est ce point précis qui rend le postulat de la mesure "mystérieux".

5) Un Modèle simple de Décohérence.

Considérons un modèle de bruit qui correspond à la transformation suivante : ($0 < p < 1$) pour ρ 2×2

$$\rho \longmapsto \mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p\,\sigma_z \rho\, \sigma_z .$$

Ici $\mathcal{E}(\rho) = E_1 \rho E_1^+ + E_2 \rho E_2^+$ avec les matrices

$$E_1 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_2 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que cette transformation est admissible car

$$E_1^+ E_1 + E_2^+ E_2 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est l'interprétation physique de cette transformation ?

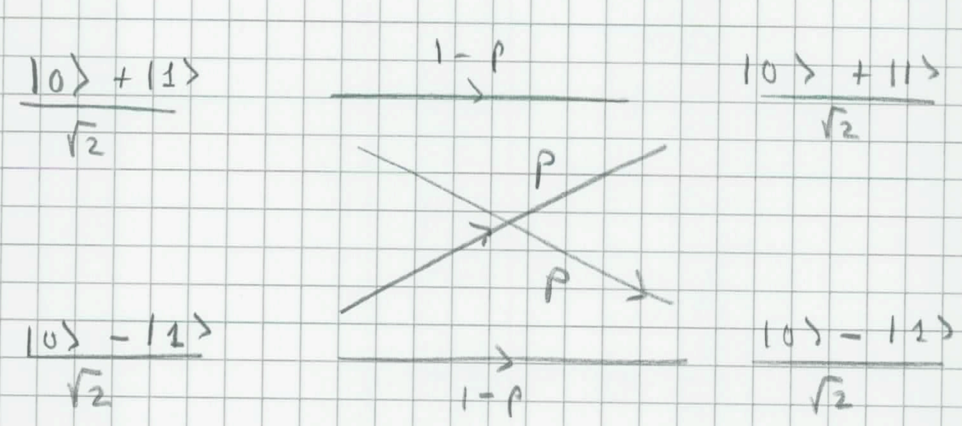
Prenons $\rho = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\bar{\alpha}\langle 0| + \bar{\beta}\langle 1|)$. Alors

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\,(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\bar{\alpha}\langle 0| + \bar{\beta}\langle 1|)$$
$$+\, p\,(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)(\bar{\alpha}\langle 0| - \bar{\beta}\langle 1|).$$

Cette équation signifie qu'avec probabilité $(1-p)$ l'état de départ $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ est inchangé et avec probabilité p l'état est modifié en $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$.

On appelle cette transformation "phase-flip channel".

C'est un analogue quantique du canal BSC classique où ici on agit sur la phase (ce qui est un processus proprement quantique) Voir figure.



Ici nous représentons ce canal pour les états $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

Notez que les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ restent invariants (à une phase près) pour ce canal.

$$|0\rangle \xrightarrow{1} |0\rangle$$

$$|1\rangle \xrightarrow{1} -|1\rangle .$$

ou en d'autres termes :

$$\mathcal{E}(|0\rangle\langle 0|) = (1-p)|0\rangle\langle 0| + p\,\sigma_z|0\rangle\langle 0|\sigma_z$$
$$= |0\rangle\langle 0|$$

et

$$\mathcal{E}(|1\rangle\langle 1|) = (1-p)|1\rangle\langle 1| + p\,\sigma_z|1\rangle\langle 1|\sigma_z$$
$$= |1\rangle\langle 1| .$$

Que se passe-t-il si on prend un qu-bit initial dans l'état

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(I + \vec{V}_0 \cdot \vec{\sigma})$$

et que l'on applique cette transformation N fois. Quand on l'applique une fois on obtient

$$\mathcal{E}(\rho_0) = \rho_1 = \frac{1}{2}(1-p)(I + \vec{V}_0 \cdot \vec{\sigma}) + \frac{1}{2}p\,\sigma_z(I + \vec{V}_0 \cdot \vec{\sigma})\sigma_z$$

Le calcul donne

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(I + \vec{V}_1 \cdot \vec{\sigma}) \quad \text{avec}$$

$$\vec{V}_1 = \left((1-2p)V_0^x,\ (1-2p)V_0^y,\ V_0^z\right) .$$

De même on trouve en itérant :

$$\mathcal{E}^N(\rho_0) = \rho_N = \frac{1}{2}\left(I + \vec{V}_N \cdot \vec{\sigma}\right)$$

avec

$$\vec{V}_N = \left((1-2p)^N V_0^x \,;\, (1-2p)^N V_0^y \,;\, V_0^z\right).$$

Si $N \to +\infty$, $\vec{V}_N \to (0, 0, V_0^z)$ et la matrice densité finale est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + V_0^z & 0 \\ 0 & 1 - V_0^z \end{pmatrix}.$$

La relaxation vers l'état final est exponentielle avec une échelle de temps de

$$T_1 = \frac{\tau}{\ln(1-2p)}$$

où τ est l'échelle de temps de chaque phase-flip.

Si par exemple on part de l'état initial ($V_0^z = 0$).

$$\frac{|\text{chat vivant}\rangle + |\text{chat mort}\rangle}{\sqrt{2}}$$

sous l'effet des "phases flips" on converge vers l'état

$$\frac{1}{2}|\text{vivant}\rangle\langle\text{vivant}| + \frac{1}{2}|\text{mort}\rangle\langle\text{mort}|.$$

Ce modèle de décohérence n'explique cependant pas pourquoi $\{ |\text{vivant}\rangle , |\text{mort}\rangle \}$ est la seule base dans laquelle on observe les chats macroscopiques.

En effet la matrice densité obtenue est aussi égale à

$$\frac{1}{2} |+\rangle\langle+| + \frac{1}{2} |-\rangle\langle-|$$

avec $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\text{vivant}\rangle + |\text{mort}\rangle)$

$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\text{vivant}\rangle - |\text{mort}\rangle)$

Si on pouvait mesurer un chat dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ on l'observerait (après décohérence) avec prob $\frac{1}{2}$ dans l'état $|+\rangle$ et prob $\frac{1}{2}$ dans l'état $|-\rangle$.

Ce qui paraît absurde pour un chat ne l'est pas pour un spin.
Les modèles de décohérence ne lèvent pas ce mystère.

6) Modèles de Canaux binaires.

a) Canal "Phase-Flip". Voir paragraphe 5.

b) Canal "Bit-Flip".

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\,\rho + p\,\sigma_x \rho \sigma_x$$

Ici $E_1 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $E_2 = \sqrt{p}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,

Pour un état de départ $|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ on a :

$$\mathcal{E}(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = (1-p)\,(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\bar{\alpha}\langle 0| + \bar{\beta}\langle 1|)$$

$$+\, p\,(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)(\bar{\alpha}\langle 1| + \bar{\beta}\langle 0|).$$

L'état $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ est inchangé avec probabilité $1-p$ et modifié en $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$ avec probabilité p.

$$\begin{tikzcd} |0\rangle \arrow[r, "1-p"] \arrow[dr, "p"] & |0\rangle \\ |1\rangle \arrow[r, "1-p"'] \arrow[ur, "p"'] & |1\rangle \end{tikzcd}$$

Mais notez que $|+\rangle\langle +|$ et $|-\rangle\langle -|$ sont inchangés

$$|+\rangle\langle +| \xrightarrow{1} |+\rangle\langle +|$$

$$|-\rangle\langle -| \xrightarrow{1} |-\rangle\langle -|.$$

c) "Bit & Phase flip channel".

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\,\rho + p\,\sigma_y\,\rho\,\sigma_y .$$

$$E_1 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_2 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici

$$\begin{tikzcd} |0\rangle + i|1\rangle \arrow[r, "1-p"] \arrow[dr, "p"'] & |0\rangle + i|1\rangle . \\ |0\rangle - i|1\rangle \arrow[r, "1-p"'] \arrow[ur, "p"] & |0\rangle - i|1\rangle \end{tikzcd}$$

d) Canal de dépolarisation complète.

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\,\rho + \frac{p}{3}\left(\sigma_x\rho\sigma_x + \sigma_y\rho\sigma_y + \sigma_z\rho\sigma_z\right).$$

Pour ce canal l'état est inchangé avec probabilité $1-p$ et devient complètement isotrope avec probabilité p.

On a :

$$E_1 = \sqrt{1-p}\,\mathbb{1} \; ; \; E_2 = \sqrt{\frac{p}{3}}\,\sigma_x \; ; \; E_3 = \sqrt{\frac{p}{3}}\,\sigma_y \; ; \; E_4 = \sqrt{\frac{p}{3}}\,\sigma_z .$$

On vérifie facilement que

$$E_1^+E_1 + E_2^+E_2 + E_3^+E_3 + E_4^+E_4 = \mathbb{1}.$$

On peut aussi montrer que

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\,\rho + p\cdot\frac{\mathbb{1}}{2}$$

ce qui justifie l'interprétation ci-dessus.