

Introduction aux Systèmes de Communications

Luciano Sbaiz, Patrick Thiran, Rüdiger Urbanke

18 septembre 2007

Table des matières

1	Traitement du signal	3
1.1	Signaux et systèmes	4
1.1.1	Introduction	4
1.1.2	Signaux	5
1.1.3	Systèmes	17
1.1.4	Exercices	27
1.2	Filtrage	29
1.2.1	Introduction	29
1.2.2	Fonction impulsionnelle. Réponse impulsionnelle	31
1.2.3	L'invariance dans le temps	32
1.2.4	Définition d'un filtre	32
1.2.5	Causalité	33
1.2.6	Stabilité	33
1.2.7	Convolution de signaux	35
1.2.8	Filtres à réponse impulsionnelle finie (FIR)	39
1.2.9	Filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR)	44
1.2.10	Exercices	46
1.3	Transformée de Fourier	52
1.3.1	Introduction	52
1.3.2	Un exemple simple	52
1.3.3	Définition	55
1.3.4	Propriétés	56
1.3.5	Convolution	57
1.3.6	Exercices	59
1.4	Échantillonnage et interpolation	60

1.4.1	Introduction	60
1.4.2	Echantillonnage	61
1.4.3	Interpolation	67
1.4.4	Exercices	76
1.5	Solutions des exercices du module traitement du signal	79
1.5.1	Solutions des exercices de la section 1.1	79
1.5.2	Solutions des exercices de la section 1.2	81
1.5.3	Solutions des exercices de la section 1.3	88
1.5.4	Solutions des exercices de la section 1.4	88

Chapitre 1

Traitement du signal

1.1 Signaux et systèmes

1.1.1 Introduction

Dans ce module nous allons parler du traitement du signal. Qu'est ce qu'un signal ? Un signal est une représentation mathématique d'une quantité physique, par exemple la pression de l'air correspondant à un certain son. Nous obtenons des signaux soit en les mesurant à l'aide de senseurs (p.ex. un microphone) soit en les générant (p.ex. le synthétiseur d'un instrument de musique)

Que peut-on faire avec les signaux ? On peut les transformer en utilisant un "système". Un système prend un signal en entrée et produit un signal à la sortie. Le signal sortant a certaines propriétés intéressantes. Prenez le microphone de l'exemple précédent. Nous pouvons le considérer comme un système qui transforme la pression du son en un signal électrique. La pression du son est difficile à amplifier ou à enregistrer (même si l'on peut penser à un système purement pneumatique pour enregistrer les sons) donc on convertit la pression du son en un signal électrique équivalent. Cependant, cette conversion a certaines limitations. Par exemple, vous ne pouvez pas utiliser le même microphone pour enregistrer un chanteur et le bruit d'une turbine d'avion : il y a une limite sur la gamme du signal que l'on peut enregistrer. De plus, normalement vous ne pouvez pas enregistrer des ultrasons avec un microphone normal (p.ex. supposez que vous voulez enregistrer une chauve-souris) i.e. il y a une limite fréquentielle. En résumé, un système tel un microphone n'est pas un convertisseur idéal de signaux. Il y a un état de fait général à propos des systèmes : ils ont certaines qualités par lesquelles nous sommes intéressés et d'autres que nous n'aimons pas. Le travail d'un ingénieur consiste, la plupart du temps, à concevoir une chaîne de systèmes afin que les mauvaises qualités soient minimisées tout en gardant les bonnes qualités et ce, au moins pour un nombre raisonnable de paramètres du signal d'entrée.

Maintenant, comment ceci est relié à la transmission/enregistrement de sons audio et MP3 ? Si vous prenez par exemple une connexion Internet, vous pouvez la considérer comme un système qui reçoit des bits d'un côté et qui en sort de l'autre côté. Le bit est l'unité d'information et correspond à l'information apportée par le signal et qui ne peut prendre que deux valeurs. Pour une connexion Internet, l'entrée et la sortie peuvent être très éloignés l'un de l'autre. Malheureusement, lorsque vous connectez votre ordinateur à l'Internet, vous réalisez à quel point le transfert d'une page web peut être long dans certains cas. Le système a certaines limitations, exactement comme dans le cas du microphone. Par exemple, il y a un nombre maximum de bits que vous pouvez envoyer par seconde. Cependant, une séquence de bits n'est pas si intéressante que cela mais nous voulons transmettre de l'audio, des images, des vidéos, du texte etc. Un autre problème réside dans le délai de transmission. Le système effectue un certain traitement sur chaque bit et cela prend du temps. De plus, il y a une limitation sur la propagation des signaux dans les câbles et les fibres optiques, de sorte qu'à la fin il y ait un délai de transmission qui n'est jamais nul. Il y a également des erreurs qui interviennent ! De temps en temps, certains bits qui sont transmis ne sont pas détectés correctement. Cela peut arriver à une fréquence de un sur un milliard mais les conséquences peuvent être catastrophiques p.ex. pour un programme d'ordinateur. Il y a d'autres types de limitations et le même type de limitations s'applique aussi

pour d'autres médias tels les disques optiques comme les disques compacts (CD) et les disques vidéos numériques (DVD) ou bien les cassettes et les téléphones mobiles etc. En conclusion, nous avons besoin de systèmes supplémentaires que nous ajoutons afin de compléter la chaîne. Chaque système de la chaîne, effectuera une transformation sur le signal de sorte que le système suivant reçoive un signal compatible avec son entrée. Maintenant, nous pouvons répondre à la question : qu'est-ce que MP3 ? MP3 est un standard spécifiant une famille de séquences de bits. Ces séquences sont utilisées pour décrire des signaux audio. Implicitement, MP3 définit comment on peut construire un système qui prend un signal audio p.ex. d'un microphone, et le transforme en quelque chose d'approprié afin d'être transmis ou enregistré en utilisant peu de bits. Etant donné que le standard spécifie uniquement comment la sortie du système doit être, il y a une grande liberté dans la conception du système lui-même. Par conséquent, deux fichiers MP3 de la même chanson peuvent sonner différemment. Le standard est le résultat de compromis, tout d'abord entre la qualité et le nombre de bit à envoyer.

Dans ce module, nous allons voir certains principes du traitement du signal et nous allons décrire certains des modules utilisés pour la conception d'un codeur audio. Malheureusement, une description précise de ces modules demande une base mathématique avancée, donc vous aurez à attendre quelques années de plus. Si tout se passe bien, cela devrait vous motiver pour apprendre ces bases mathématiques dans les cours des deux premières années de votre cursus.

1.1.2 Signaux

Idée intuitive d'un signal

Soyons un peu plus formels quant à la définition d'un signal. Nous avons déjà mentionné qu'un signal est une fonction associée à une certaine quantité physique. Nous savons qu'une fonction a un domaine de départ et un domaine d'arrivée. Quels sont les domaines de départ et les domaines d'arrivée des signaux ? Le domaine de départ typique d'un signal est le temps, donc si pensez que le temps est continu (probablement qu'un physicien pédant ne serait pas d'accord là-dessus) le domaine de départ est \mathbb{R} . Qu'en est-il du domaine d'arrivée ? C'est quelque chose que l'on peut mesurer donc c'est un entier ou un nombre réel. On préfère souvent les nombres réels car ils ont de bonnes propriétés (vous verrez cela dans d'autres cours).

Exemple : température vs. temps. Signaux à temps continu et à temps discret

Supposez que l'on veuille mesurer la température à Lausanne durant une certaine période. Quel type de signal est-ce ? Le domaine de départ et la gamme peuvent être représentés par des nombres réels. Ce type de signaux est appelé **signaux à temps continu**, car l'axe du temps est continu (remarquez que le signal n'est pas nécessairement une fonction continue !). Donc nous pouvons modéliser la température comme une fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} . Cependant, il serait difficile de "mesurer" une telle fonction ! Nos instruments mesurent une certaine quantité à des instants discrets du temps seulement. Même si nous utilisons un thermomètre à mercure, nous aurions besoin en permanence d'un opérateur près du thermomètre (et il ne pourrait pas noter les mesures. Nous pouvons tracer la température directement sur

une feuille de papier ce qui permettrait d’avoir une fonction réelle, mais plus tard il serait très difficile (voire impossible) de faire quoi que ce soit avec le dessin de la fonction (par exemple de calculer la température moyenne durant une année. Cependant, on peut prendre en compte le fait que la température change très lentement, donc on peut décider de la mesurer toutes les heures par exemple. Il est très improbable que la température soit très irrégulière entre deux mesures, on peut donc être satisfait par cette approche. On appelle ce type de signaux **signaux à temps discret** (car le signal est défini sur un ensemble discret de points). Le traitement du signal moderne traite presque toujours des signaux à temps discret même si la réalité est continue. Nous verrons plus tard comment cela est possible, mais vous avez déjà l’intuition que nous pouvons au moins “approximer” un signal à temps continu par un signal à temps discret. Nous devons simplement prendre assez de mesures sur des points discrets de l’axe temporel. Nous appelons cette procédure **échantillonnage** (voir Figure 1.1). Nous verrons comment cela fonctionne lors de la troisième leçon.

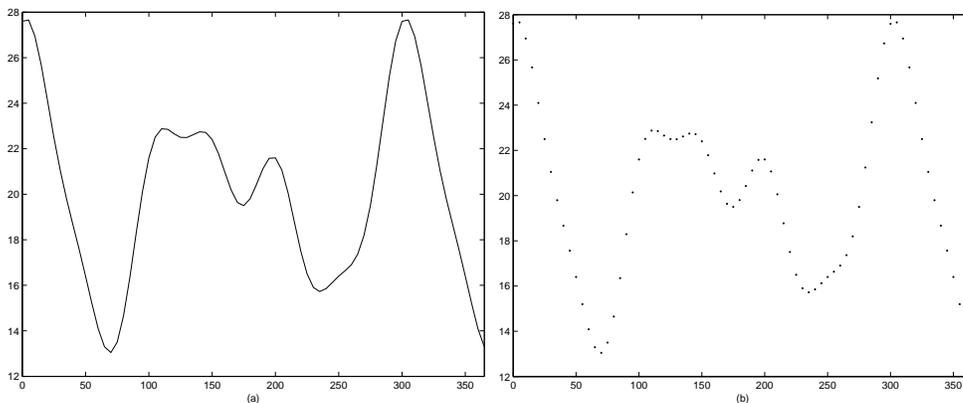


FIG. 1.1 – Exemple de représentation de signaux à temps continu et discret. (a) Signal à temps continu. (b) Signal à temps discret.

Signaux dans un ordinateur

Développons ce que nous avons vu dans l’exemple précédent. Tout d’abord répondons à la question suivante : quel type d’information peut-on stocker dans un ordinateur (ou sur un disque ou bien envoyée à travers l’Internet) ? Peut-on stocker un nombre réel ? On peut rappeler qu’un nombre réel est de la forme “3.1416...”. En général, ce qui vient après la virgule peut être une série infinie non-périodique de chiffres. Peut-on stocker cela dans un ordinateur ? De façon surprenante, on peut stocker “certains” de ces nombres. En fait, supposez qu’une certaine quantité ne peut prendre comme valeurs que 1, $1/3$, e , π , on peut alors représenter cette quantité avec deux bits seulement. En fait, avec deux bits on obtient quatre combinaisons correspondant aux quatre valeurs que l’on veut représenter. Par exemple, si les deux bits sont b_0 et b_1 , on choisit

Valeur	b_0	b_1
1	0	0
1/3	0	1
e	1	0
π	1	1

Cela définit les valeurs que nous voulons enregistrer si les valeurs en question n'ont pas de représentation décimale finie. Comme vous pouvez voir, ceci est une astuce générale mais nous ne pouvons l'utiliser que pour un ensemble fini d'éléments. En fait, toutes les ressources d'un ordinateur (ou d'un système de communication) sont limitées. Encore aujourd'hui bien que l'on puisse stocker beaucoup de bits dans un ordinateur, le nombre de combinaisons reste fini ainsi que le nombre de valeurs que l'on peut représenter (mais nous avons la liberté de choisir ce que nous associons à chaque combinaison). Les informaticiens utilisent plusieurs représentations pour les entiers, les nombres réels et autres valeurs numériques. Afin d'utiliser ces représentations, ils doivent *approximer* la vraie valeur par un élément de la représentation.

Qu'en est-il des signaux ? Quels sont les signaux que nous pouvons enregistrer, traiter et transmettre en utilisant des systèmes digitaux ? Peut-on traiter les signaux à temps continu ? Comme dans le cas précédent, nous pouvons montrer que nous pouvons représenter "certains" signaux à temps continu. En fait, prenons par exemple le signal :

$$y(t) = at^2 + bt + c.$$

Vous devez probablement vous souvenir que c'est une parabole. Peut-on enregistrer ce type de signal sur un disque ? La réponse est oui, puisque toute parabole est représentée par trois nombres réels a, b, c et que nous savons comment représenter un ensemble fini de nombres réels. Par conséquent, nous pouvons enregistrer un ensemble fini de signaux à temps continu. Si nous savons qu'une certaine quantité physique (comme la température de l'exemple précédent) a une variation parabolique, nous pouvons utiliser un dispositif qui permet la mesure des paramètres de la parabole et leur stockage. Plus tard nous serons capables de rechercher les paramètres et de reproduire la parabole avec un autre dispositif et effectuer un traitement dessus.

Qu'en est-il de la transmission de signaux à temps continu ? Quels sont les signaux que nous pouvons transmettre ? Nous pouvons raisonner comme dans l'exemple précédent mais ici nous n'avons pas besoin de stocker les paramètres puisque nous les transmettons. Le nombre de paramètres que l'on peut envoyer par seconde est une quantité finie, donc on peut transmettre les signaux qui peuvent être représentés "localement" par un nombre fini de paramètres. Par exemple, pensez à un signal construit à partir de segments d'une seconde chacun et chaque segment est une parabole. Nous pouvons mesurer les paramètres de chacun des segments paraboliques et les envoyer au récepteur. A ce niveau là, nous sommes capables de reconstruire exactement le signal d'entrée en générant les pièces de paraboles correspondant aux paramètres. Nous pouvons le faire uniquement parce que le signal considéré est pris dans un ensemble de fonctions qui peuvent être décrites localement par un nombre fini de paramètres. Nous appelons les ensembles de ce type "ensemble de signaux avec un taux d'innovation fini".

Qu'en est-il des signaux audio sur un ordinateur ? Peut-on les décrire à l'aide d'une fonction ayant un nombre fini de paramètres ? Si l'on considère un son générique "non". On doit l'approximer avec une fonction qui a un taux d'innovation fini. Une façon commune est de prendre des

échantillons du signal à temps continu tel que nous l'avons vu dans l'exemple de la température. Nous verrons cela plus en détail lors de la troisième leçon.

Définition d'un signal

Voyons une définition plus formelle d'un signal. Le premier concept dont nous avons besoin est celui du produit cartésien. Nous supposons que le concept qu'un ensemble est une "collection d'éléments" est connu.

Définition 1. *Le produit cartésien de deux ensembles A , B est l'ensemble*

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

c'est à dire, le produit cartésien est l'ensemble de toutes les paires ordonnées possibles d'éléments de A et de B .

Définition 2. *Une relation R est un sous-ensemble du produit cartésien de deux ensembles A , B i.e.*

$$R \subseteq A \times B$$

En d'autres termes, une relation met en correspondance les points de deux ensembles A et B . Cependant, un point dans A peut être en relation avec plus d'un point dans B (voir Figure 1.2). Pour une fonction nous ne permettons pas cela et chaque point est en relation avec exactement un seul point dans B :

Définition 3. *Une fonction est une relation de A vers B telle que :*

1. *pour chaque élément $a \in A$ il y a un élément $b \in B$, tel que (a, b) soit en relation*
2. *si (a, b) et (a, c) sont en relation, alors $b = c$.*

Remarquons que les points de B ne sont pas contraints à être en relation avec exactement un point dans A . Ils peuvent être en relation avec plusieurs points ou avec aucun des points de A .

Il est commun d'écrire la fonction f de la façon suivante :

$$f : A \rightarrow B$$

où A est appelé le domaine de départ et B le domaine d'arrivée. Nous pouvons maintenant définir un signal comme la fonction

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

où A est \mathbb{R} pour les signaux à temps continu et \mathbb{Z} pour les signaux à temps discret. Cela peut être surprenant que l'on considère des ensembles ayant un nombre infini d'éléments. En réalité, nous commençons toujours nos mesures (ou bien la transmission ou encore l'acquisition) à un

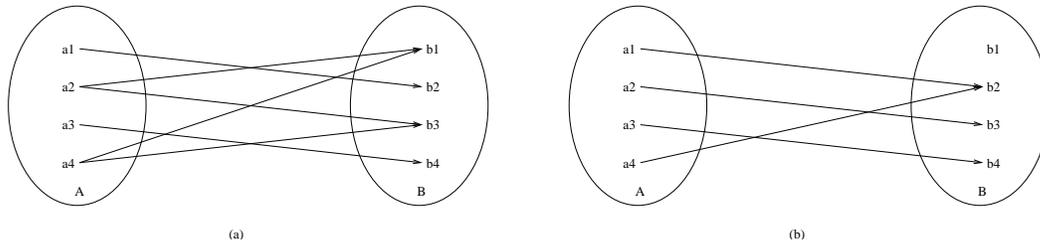


FIG. 1.2 – Les relations et les fonctions sont tous les deux des sous-ensembles du produit cartésien de deux ensembles A et B . (a) Une relation définit un ensemble de correspondances entre les éléments de deux ensembles. (b) Une fonction $f : A \rightarrow B$ est une relation qui assigne à chaque élément de A un seul élément de B .

instant donné et probablement nous les arrêterons à un instant donné dans le futur. Cependant, nous préférons définir les signaux mathématiquement sur l'axe réel tout entier afin de simplifier la notation pour beaucoup d'opérations. On peut simplement imaginer que l'on étend le signal en dehors de sa véritable gamme. On devra bien sûr savoir comment faire cette extension si l'on veut construire un dispositif pour le traitement du signal.

L'ensemble B est \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Les valeurs complexes sont utilisées car elles simplifient les notations, mais la majorité des quantités physiques sont réelles. Nous avons vu que nous ne pouvons pas représenter les valeurs d'un ensemble infini tel que les réels. Cependant, l'erreur d'approximation est d'ordinaire petite et dans les équations nous négligeons souvent les erreurs d'arrondis.

La sinusoïde

Voyons maintenant un type de signal que les ingénieurs aiment bien utiliser (nous en verrons une des raisons lors de la deuxième leçon). C'est la sinusoïde

$$y(t) = P \sin(2\pi ft + \phi) \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

C'est un signal à temps continu. Le temps t est sur l'axe réel et la valeur instantanée y est également réelle (en fait elle appartient à l'intervalle $[-P, P]$). Le paramètre P est appelé **amplitude** et f est la **fréquence** et est mesurée en **Hertz (Hz)**. La fréquence correspond au nombre de périodes accomplies en une seconde. Par exemple, une fréquence de 440 Hz signifie que la sinusoïde accomplit 440 cycles par seconde¹. Alternativement, on peut spécifier le temps requis pour accomplir un cycle de la sinusoïde. C'est la période $T_P = 1/f$ de la sinusoïde. La sinusoïde devient

$$y(t) = P \sin\left(2\pi \frac{t}{T_P} + \phi\right) \quad (1.2)$$

On veut souvent se débarrasser du facteur 2π donc on préfère mesurer la fréquence en **radians par seconde**. Le symbole ω est communément utilisé pour dénoter la fréquence en radians par

¹Ceci est en fait la note "La" dans la musique occidentale

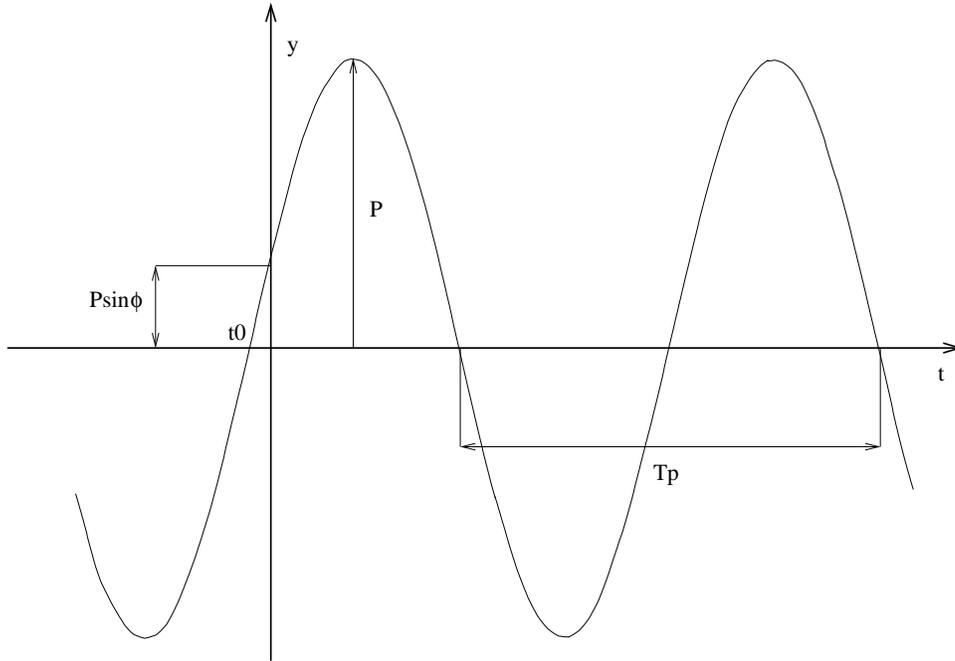


FIG. 1.3 – Les paramètres d’une sinusoïde.

seconde. Bien sûr, la relation entre la fréquence en Hertz et en radians par seconde est :

$$\omega = 2\pi f \quad (1.3)$$

La **phase** ϕ peut être considérée comme une translation de la sinusoïde le long de l’axe du temps. En fait, on peut écrire

$$y(t) = A \sin(2\pi f(t - t_0)) \quad (1.4)$$

avec $t_0 = -\phi/(2\pi f)$.

Nous venons de voir une sinusoïde à temps continu. Nous pouvons définir la sinusoïde à temps discret :

$$y(n) = P \sin(2\pi f_D n + \phi) = P \sin(\omega_D n + \phi) \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.5)$$

Notez qu’ici nous utilisons la variable n au lieu de t pour contraindre le signal à être défini sur les entiers. Si vous tracez la sinusoïde à temps discret et que vous la comparez à la sinusoïde à temps continu, vous verrez qu’elles se ressemblent. Cependant, il y a une différence majeure concernant la périodicité de la sinusoïde à temps discret. Rappelons qu’une fonction $h : A \rightarrow B$ est périodique de période p si

$$h(x) = h(x + lp) \quad \forall x \in A, l \in \mathbb{Z},$$

i.e. le signal se répète à chaque période p le long de la coordonnée temporelle. Il est trivial de vérifier que la sinusoïde est périodique de période $p = T_p$. Cependant, la sinusoïde à temps discret

n'est, en général, pas périodique. En fait, si la fréquence f_D n'est pas rationnelle, il n'existe pas de valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ telles que $f_D n$ soit un entier. C'est à dire, les angles sur lesquels on calcule la sinusoïde sont toujours différents et le signal ne se répète jamais.

Signaux multidimensionnels. Images, télévision et vidéo

Les signaux que nous avons vus jusqu'ici sont unidimensionnels puisqu'ils sont fonction du temps uniquement. Cependant, beaucoup de phénomènes physiques ne peuvent être décrit par une fonction d'une seule coordonnée. Une exemple typique est la mesure sur une surface (température, pression, déformation, etc.). La position sur une surface est donnée par deux coordonnées, il est donc naturel de modéliser la mesure avec un signal à deux dimensions. Un signal multidimensionnel est une fonction

$$f : A \rightarrow B$$

comme pour un signal à une dimension, mais dans ce cas le domaine de départ A est obtenu en composant \mathbb{R} et/ou \mathbb{Z} via le produit cartésien. Par exemple, considérons l'intensité de la lumière atteignant le film d'un appareil photographique. Nous pouvons définir un système de coordonnées sur la surface du film, et l'intensité est décrite par un signal à deux dimensions :

$$I : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons l'abréviation $\mathbb{A} \times \mathbb{A} = \mathbb{A}^2$ afin de simplifier la notation.

Ce dont nous avons discuté à propos de l'enregistrement des signaux à une dimension reste valable pour les signaux à deux dimensions. Encore une fois, nous pouvons stocker uniquement les images que nous pouvons décrire à l'aide d'un nombre fini de paramètres. Normalement les paramètres sont les valeurs de l'image sur une grille uniformément espacée. Nous obtenons une image discrète :

$$i_D : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Aujourd'hui, il est très facile d'obtenir des images discrètes grâce aux appareils photographiques digitaux. Un appareil photographique numérique contient, au lieu d'un film, un dispositif à couplage de charge ou "Charge-Coupled Device" (CCD). Le CCD a plusieurs éléments sensibles à la lumière. Ces éléments sont organisés comme une matrice de points appelés pixels (l'appellation "pixel" vient de l'abréviation de "picture élément"). Un appareil récent peut avoir plusieurs millions de pixels (ou megapixels). Chaque senseur du CCD mesure l'intensité de la lumière correspondant à un pixel, donc nous obtenons directement une image discrète sans conversion (voir Figure 1.4).

Remarquez que nous pouvons mélanger les coordonnées continues et discrètes et définir des signaux tels :

$$i_{CD} : \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

Nous pouvons obtenir un signal comme celui-là en prenant les lignes d'une image continue à des positions discrètes (cette méthode est appelée "échantillonnage" et sera expliquée lors de la troisième leçon). Un exemple d'un signal de ce type est un signal TV. Nous considérerons des signaux télévisuels en noir et blanc pour le moment. Au début de la télévision tout était



FIG. 1.4 – Une image discrète est une fonction de deux indices définissant l'intensité des pixels.

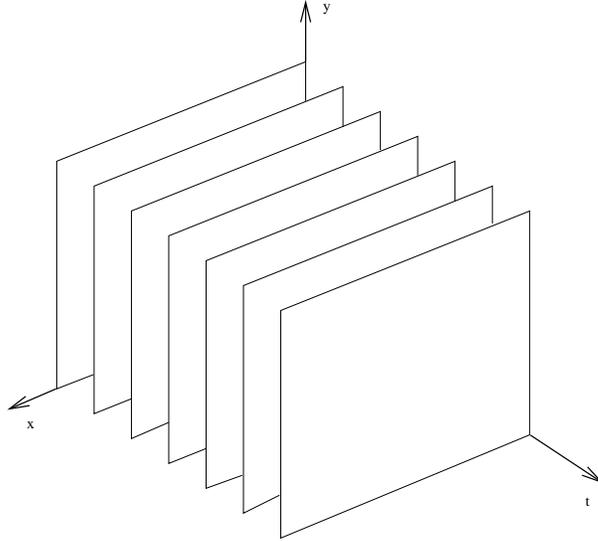


FIG. 1.5 – Une séquence vidéo peut être considérée comme un signal défini sur \mathbb{Z}^3 . L'indice temporel définit une image de la séquence (aussi appelée **frame**), les deux indices restants déterminent la position du pixel.

analogique (en fait la télévision a été inventée avant l'électronique numérique). Le signal TV était obtenu en utilisant un faisceau électronique pour scanner une surface sensible à la lumière. Le résultat peut être décrit à l'aide du signal que nous avons vu. Aujourd'hui les caméras contiennent également des CCDs mais le signal qui est émis est toujours du même type.

A la télévision vous n'avez pas seulement une image statique mais une image qui change dans le temps, i.e. un signal vidéo. Nous pouvons décrire un signal vidéo en temps continu par la fonction :

$$v_C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

i.e. une vidéo est une fonction $v(x, y, z)$ où x et y sont les coordonnées spatiales et t la coordonnée temporelle. Où peut on trouver un tel signal ? Nous pouvons le trouver sur la surface d'un capteur de n'importe quelle caméra vidéo. Cependant, le capteur transforme le signal en un signal à temps discret. Une caméra analogique (toujours communément utilisée dans l'émission) échantillonne le long de l'axe temporel et de la coordonnée y donnant lieu à un signal de la forme :

$$v_{CD} : \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

i.e. maintenant nous avons un signal $v_D(x, m, n)$ où $x \in \mathbb{R}$ est la position horizontale continue le long d'une certaine ligne, m est l'indice de la ligne et n l'indice temporel (voir Figure 1.5).

Pour stocker une vidéo sur un support numérique nous avons besoin d'échantillonner aussi le long des lignes (telles les caméras numériques). Nous obtenons un signal de la forme

$$v_D : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

i.e. maintenant une vidéo est une fonction de trois indices correspondant à la position et au temps. Ceci est le type de vidéos stockées sur les ordinateurs, DVD et CD.



FIG. 1.6 – Quatre images (aussi appelées *frames*) d’une séquence vidéo.

Qu’en est-il de la couleur ? Signaux vectoriels

Vous avez probablement remarqué que nous avons négligé la couleur dans les discussions précédentes, i.e. ce que nous avons dit est vrai pour les images et vidéos en noir et blanc. Comment traiter la couleur ? Nous voyons la couleur car la lumière est composée de différents composantes spectrales, i.e. des composantes ayant des fréquences différentes. Nos yeux ont des cellules ayant différentes sensibilités aux composantes spectrales. Il existe trois types de senseurs, donc une certaine couleur peut être décrite par trois quantités. Donc une image couleur est aussi décrite par trois valeurs pour chaque position. Nous pouvons faire cela en utilisant trois signaux différents. Cependant, les trois images sont strictement reliées, donc nous préférons utiliser un signal vectoriel (voir figure 7). Nous pouvons considérer un vecteur comme un ensemble ordonné de nombres, donc c’est aussi un élément d’un produit cartésien de \mathbb{R} avec lui-même. Une image couleur est représentée sur un ordinateur par un signal :

$$i_D^{(3)} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

et une vidéo couleur par le signal

$$v_D^{(3)} : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Vous connaissez probablement d’autres types de signaux qui peuvent être décrit en utilisant une représentation vectorielle. Par exemple, l’audio stéréo : on a deux canaux qui sont reliés et synchronisés dans le temps, donc il est pratique de les représenter en utilisant un signal vectoriel avec deux composantes. Le principe peut être étendu à l’audio à canaux multiples qui sont utilisés dans les cinémas ou dans les systèmes de “home cinéma”. Ils utilisent normalement cinq ou six canaux pour enregistrer de l’audio. Avec le progrès technologique, les senseurs et les dispositifs de traitement deviennent de moins en moins chers et de plus en plus petits. Il est raisonnable de prédire qu’il y aura de plus en plus d’applications qui utilisent des rangées de senseurs.

Symboles et séquences

Nous avons vu des exemples dans lesquels l’information temporelle ou spatiale est représentée par des fonctions d’une variable du temps ou de l’espace. Dans beaucoup de situations, l’information est représentée comme des séquences de symboles qui représentent des données ou un flux d’événements. La différence principale avec les signaux est que les valeurs d’une séquence sont



FIG. 1.7 – Une image couleur et sa décomposition en trois composantes couleur. (a) Image originale. (b) Composante rouge. (c) Composante verte. (d) Composante bleue.

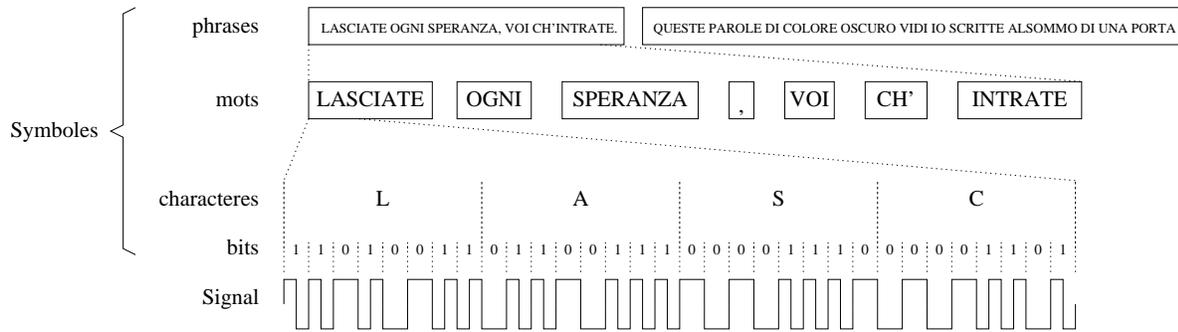


FIG. 1.8 – L’information peut être organisée en couches. La couche inférieure représente les signaux. Les couches plus hautes représentent l’information utilisant les symboles.

prises dans un ensemble qui n’est pas directement relié à une quantité physique. Par exemple, dans un fichier de texte chaque lettre peut être considérée comme un symbole mais ne correspond pas à quelque chose de mesurable. Comme vous le voyez, les symboles sont des entités abstraites qui ne correspondent pas directement à une représentation physique spécifique (i.e. un certain signal). Cependant, ils ont besoin qu’une représentation physique existe. Par exemple, vous pouvez lire ce texte sur l’écran d’un ordinateur ou imprimé sur un papier. Dans les deux cas, il y a certains signaux associés à chaque lettre du texte qui seront différents pour les deux médias. Cependant, l’information apportée par les signaux, i.e. les symboles, est la même. Si vous imprimez un texte avec une qualité différente ou bien si vous changez les arrangements de l’écran, vous changerez les signaux utilisés pour représenter les symboles mais pas les symboles eux-mêmes. Donc, le concept de symbole est relié à la sémantique, i.e. la signification que nous associons à une classe de signaux.

Nous avons besoin de dispositifs pour changer la représentation des symboles. Par exemple, un texte est représenté dans la mémoire de l’ordinateur comme une certaine combinaison de charges sur certains composants. Pour afficher le texte à l’écran, nous avons besoin de mesurer les charges correspondant à chaque lettre et les convertir en un ensemble de points représentant chaque pixel. Le statut de chaque pixel est utilisé pour générer les signaux qu’obtient le CRT de l’écran. Il y a plusieurs dispositifs qui font ce type de conversion : imprimantes, scanners, modems, lecteurs/graveurs de CD, claviers et beaucoup d’autres.

Qu’est ce qu’un symbole exactement ? Puisque c’est un objet abstrait, il est arbitraire de définir ce qu’est un symbole. Dans un fichier texte, est ce que ce sont les mots ou les lettres qui sont les symboles ? Il semblerait que l’on peut définir une hiérarchie de symboles : les lettres sont groupées ensemble pour former des mots, les mots sont groupés pour former des phrases et ainsi de suite (voir figure 8). A la base de la hiérarchie nous avons les signaux, i.e. le support physique, dans de plus hauts niveaux nous représentons les symboles à l’aide d’un contenu d’information plus élevé. Ceci est le concept général appliqué par les ingénieurs. L’information est organisée en niveaux, chaque niveau est associé à une certaine représentation. Nous pouvons aussi considérer les opérations que nous effectuons comme une transformation à un niveau spécifique. Par exemple, le fichier texte peut être transmis en utilisant un modem qui change le signal utilisé pour représenter le texte. Nous pouvons opérer à un niveau supérieur de la hiérarchie et changer

un caractère avec un éditeur de texte ou bien nous pouvons changer un mot. A un niveau plus élevé nous pouvons changer la signification d'une phrase et ainsi de suite.

1.1.3 Systèmes

Le dispositif (ou bien le software) qui réalise une transformation de l'information est appelé un "système". Ceci est un terme générique qui dénote quelque chose qui prend une séquence ou un signal à son entrée et produit une séquence ou un signal à sa sortie. Mathématiquement nous pouvons décrire un système comme une fonction qui prends une fonction comme entrée (la séquence ou le signal d'entrée) et produit une fonction à la sortie (la séquence ou le signal de sortie). Dans le traitement du signal nous sommes intéressés par les systèmes dont l'entrée, la sortie, ou bien les deux sont des signaux.

Il existe plusieurs cas où nous avons besoin de changer le média sur lequel l'information est représentée. Par exemple, pour envoyer un fichier texte à travers une ligne téléphonique, vous devez le convertir en un signal qui est similaire à la voix. Nous pouvons décrire mathématiquement le dispositif qui effectue la transformation comme une fonction qui prends les symboles à son entrée, i.e. les caractères, et produit un signal similaire à la voix à sa sortie. Nous appelons cette fonction **modulateur**. Du côté du récepteur, le signal similaire à la voix est transformé en une séquence de symboles par le **démodulateur**. Un dispositif qui est composé d'un modulateur et d'un démodulateur est appelé **modem**. Notez que l'utilisation de symboles pour représenter l'entrée du modulateur et la sortie du démodulateur est un formalisme mathématique pour éliminer la représentation de tels symboles en utilisant des signaux. Un dispositif réel ne traite que des signaux.

Il existe plusieurs autres cas où nous avons besoin de convertir les signaux afin d'utiliser un médium différent pour stocker/transmettre l'information. Etant donné que chaque médium à des caractéristiques spécifiques, nous avons besoin de dispositifs spécifiques. Parmi les différents médias nous avons les câbles, les fibres optiques, les disques optiques (CD ; DVD ; etc.), les supports magnétiques (disques et cassettes), le papier, l'air (signaux acoustiques) et beaucoup d'autres.

D'autres types de systèmes effectuent les transformations de signaux afin d'améliorer certaines qualités. Par exemple, nous pouvons penser au contrôle de la tonalité d'une chaîne HiFi : le signal est filtré pour amplifier ou atténuer certaines fréquences. Nous pouvons penser à des exemples plus sophistiqués de systèmes pour le perfectionnement. Par exemple pour améliorer une image que vous avez acquise avec un appareil photographique numérique. (p.ex. pour éliminer l'effet "yeux rouges")

Un autre type de systèmes est utilisé pour le contrôle d'un processus physique. Pensons par exemple à un système de chauffage. Il y a un nombre de senseurs qui mesurent la température et un nombre de dispositifs de chauffage que nous contrôlons. Un système est nécessaire pour traiter les mesures et calculer les signaux de contrôle de sorte que certaines conditions sur la température soient satisfaites. Par exemple, nous imposons une certaine température constante que nous voulons garder avec une erreur minimale ou bien nous voulons imposer un profile de température tout au long du temps.

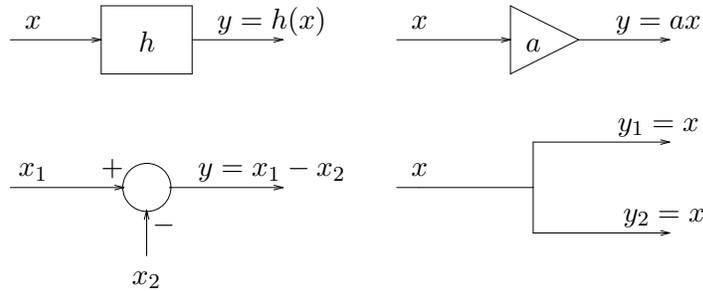


FIG. 1.9 – Symboles utilisés dans les diagrammes de blocs.

Représentation par blocs. Sous-systèmes

Nous représentons souvent les systèmes avec des blocs. Une séquence de systèmes est représentée par une chaîne de blocs interconnectés par des flèches. Nous pouvons écrire des noms pour les signaux à l’entrée et à la sortie de chaque bloc. Quelques systèmes communs sont représentés par des symboles spéciaux. Par exemple, l’addition de deux signaux est représentée par un cercle. Si nous voulons envoyer un certain signal à deux systèmes, nous dessinons simplement une bifurcation (ceci peut aussi être considéré comme un système). Dans la Figure 1.9 certains symboles de blocs sont montrés.

La représentation par blocs est une façon de représenter un système complexe en terme de sous-systèmes. Chaque sous-système est représenté par une “boite noire”, c’est à dire que nous connaissons la fonctionnalité du bloc mais nous ne concentrons pas notre attention sur la manière dont il est implémenté. C’est la représentation par niveaux que nous avons précédemment vue. Si vous programmez un ordinateur, vous devez vous intéresser uniquement à la syntaxe du langage et non pas au courant affluant dans les millions de transistors du processeur. Si les niveaux en dessous fonctionnent correctement, la méthode fonctionne et vous pouvez vous concentrer uniquement sur ce que vous concevez.

Un exemple de modulateur : dual-tone multifrequency (DTMF)

Voyons un exemple de modulateur. Il est appelé dual-tone multifrequency et est utilisé dans la téléphonie pour transmettre un numéro de téléphone à travers la ligne téléphonique. Il y en a un dans chaque téléphone.

Le système est basé sur un clavier avec douze clés. Sur les clés, les dix figures plus les symboles spéciaux “*” et “#” sont représentés. Les symboles sont organisés en rectangle de quatre lignes et trois colonnes. A chaque ligne et à chaque colonne sont associées des fréquences distinctes. Lorsque les utilisateurs pressent sur l’une des touches, le modulateur génère un signal en ajoutant deux sinusoïdes de fréquences correspondant à la ligne et à la colonne de la clé. Par exemple, un “0” est représenté comme une somme de deux sinusoïdes de fréquences 941 Hz et 1,336 Hz.

Nous verrons dans la seconde leçon comment nous pouvons démoduler le signal de sortie et reconnaître quelle clé a été pressée, mais nous pouvons déjà penser à quelque chose de similaire

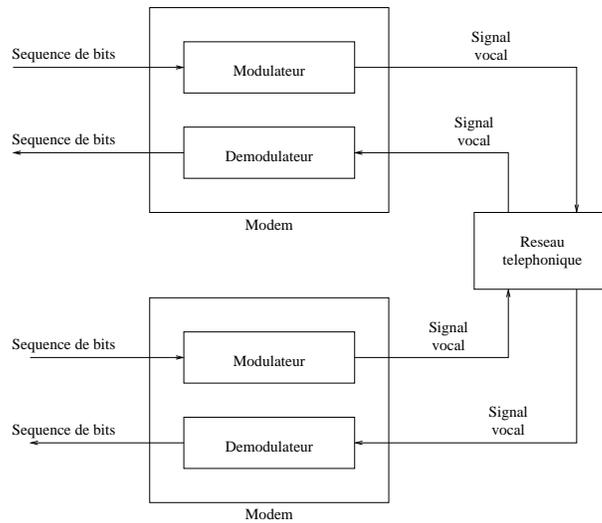


FIG. 1.10 – Modems pour bande vocale.

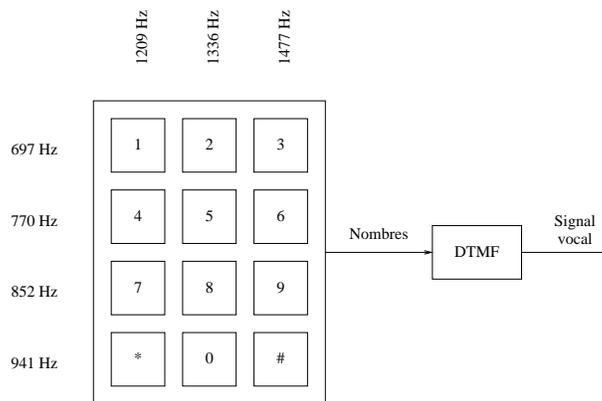


FIG. 1.11 – Un système dual-tone multifrequency convertis les nombres d'un pavé numérique en un signal similaire à la voix.

au contrôle de la tonalité d'une chaîne HiFi pour séparer les différentes sinusoïdes.

Quantification de signaux

Dans les sections précédentes nous avons discuté de plusieurs types de signaux. Nous avons dit que nous supposons qu'ils prenaient leurs valeurs dans \mathbb{R} . Cependant, nous avons vu que les ordinateurs et les systèmes de communication ont des ressources finies et ne peuvent traiter que des ensembles finis de valeurs. Par conséquent, les nombres réels sont approximés par des valeurs appropriées. Il y a différentes façons de choisir l'ensemble des valeurs. Chaque choix correspond à une quantité différente de mémoire dont on a besoin pour représenter les valeurs et une précision différente de la représentation.

Dans le traitement du signal, nous appelons **quantification** la procédure de conversion d'un nombre réel en une représentation de taille finie. Nous appelons **quantificateur** le dispositif qui effectue la conversion, Parfois, nous voulons passer d'une représentation à une autre. Par exemple, cela est fait afin de réduire la quantité de mémoire dont on a besoin pour stocker l'information. Même dans ce cas, nous parlons de quantification.

Etant donné que la quantification est une transformation sur les signaux nous pouvons l'appeler système. Appelons I l'ensemble fini que nous décidons d'utiliser pour approximer les nombres réels. Le quantificateur, pour les signaux à temps discret et à une dimension, est représenté par la fonction.

$$q : [\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}] \rightarrow [\mathbb{Z} \rightarrow I].$$

De la même façon nous pouvons définir la quantification d'autres types de signaux.

Un quantificateur qui convertit les valeurs dans la représentation I_A à la représentation I_B est représenté par la fonction :

$$q : [\mathbb{Z} \rightarrow I_A] \rightarrow [\mathbb{Z} \rightarrow I_B].$$

Il existe un type de quantification que vous connaissez sûrement. C'est l'arrondissement et la troncation des nombres réels. Ce sont des façons de transformer un nombre réel en un nombre entier. Les entiers forment encore un ensemble infini donc nous devons fixer une valeur minimale et maximale aux valeurs que nous allons représenter. Regardons comment cela fonctionne à travers un exemple. Supposons que nous voulons acquérir une image avec un ordinateur. Afin de réaliser cela, nous avons besoin de convertir le signal de sortie d'un appareil photo à une représentation numérique qui peut être stockée dans l'ordinateur. La sortie de l'appareil photo est un signal analogique v . Il y a une valeur maximale de l'intensité de la lumière qui peut être mesurée. Supposons qu'une telle intensité correspond au signal de sortie V_0 . Nous savons aussi que $v \geq 0$ puisque l'intensité de la lumière n'est pas négative. Pour convertir un tel signal à une représentation numérique, nous avons besoin d'un dispositif appelé Convertisseur Analogique à Numérique (ADC ou AD). L'AD combine dans le même dispositif le quantificateur et l'échantillonneur. L'échantillonneur transforme le signal du temps continu au temps discret. Nous allons le voir lors de la troisième leçon. Le quantificateur représente l'amplitude en utilisant un nombre fini de valeurs, L . Nous choisissons normalement $L = 2^b$, i.e. une puissance de 2. De cette façon, nous utilisons toutes les combinaisons de b bits pour représenter les valeurs. Un

exemple avec $b = 3$ est donné dans la Figure 1.12. La gamme de l'entrée est décomposée en intervalles de taille

$$\Delta = \frac{V_0}{2^b}.$$

La sortie y est calculée par

$$y = q(v) = \left\lfloor \frac{v}{\Delta} \right\rfloor \Delta.$$

En d'autres termes, les valeurs d'un certain intervalle sont ramenées à la valeur *minimale* de l'intervalle. L'erreur de quantification $e = v - y$ est toujours positive et sa valeur maximale est Δ (étant donné que le signal d'entrée reste dans la gamme attendue).

En pratique, le nombre de bits b est normalement plus grand que 3. Par exemple il est commun de représenter une image en noir et blanc avec des valeurs dans l'intervalle $[0, 255]$. Cet intervalle peut être représenté avec $b = 8$ bits, i.e. un byte de mémoire. Une image en noir et blanc devient une fonction

$$i_D : \mathbb{Z}^2 \rightarrow I_8,$$

où I_8 est l'ensemble d'entiers dans $[0, 255]$. Les images en couleur ont besoin de trois valeurs pour chaque pixel donc elles requièrent 24 bits, i.e. trois bytes. Par conséquent une image en couleur est une fonction

$$i_D^{(3)} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow I_8^3.$$

Pour les signaux audio, nous utilisons encore plus de bits. Les disques compacts sont enregistrés en utilisant 16 bits et un DVD-Audio utilise 24 bits.

Déformation d'images

Voyons maintenant un autre système qui transforme une image en une autre image. L'idée principale est de prendre les pixels de l'image d'entrée et de les réorganiser afin d'obtenir l'image de sortie. Pour déplacer les pixels nous utilisons des fonctions continues, donc le résultat est une déformation de l'image. Ceci est également un système. Pour les images en couleur, elle est de la forme

$$w : [\mathbb{Z}^2 \rightarrow I_8^3] \rightarrow [\mathbb{Z}^2 \rightarrow I_8^3]$$

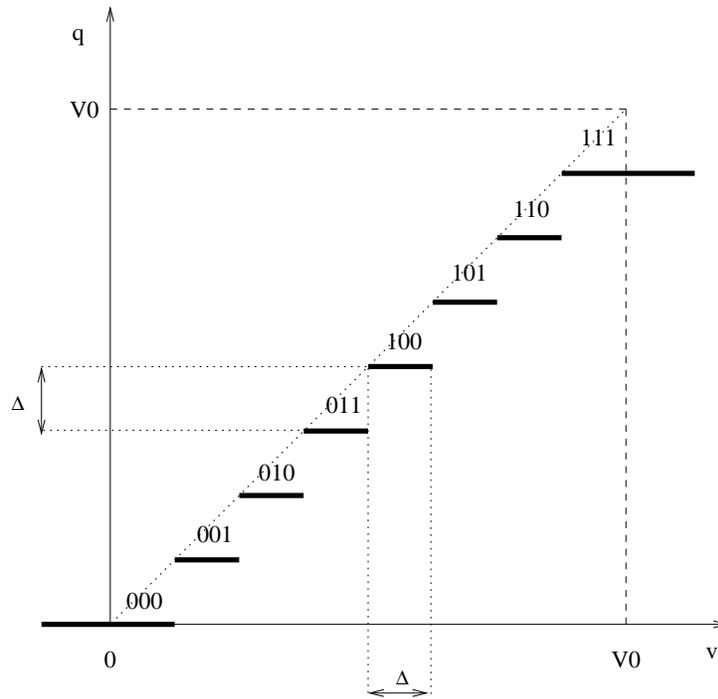
où I_8 représente un entier représenté sur 8 bits. Afin de définir précisément la déformation, nous avons besoin de spécifier comment les valeurs des pixels sont déplacées. Par exemple, si l'image d'entrée est $i_I(x, y)$ et l'image de sortie est $i_O(x, y)$, nous pouvons définir :

$$i_O(x, y) = i_I(x', y')$$

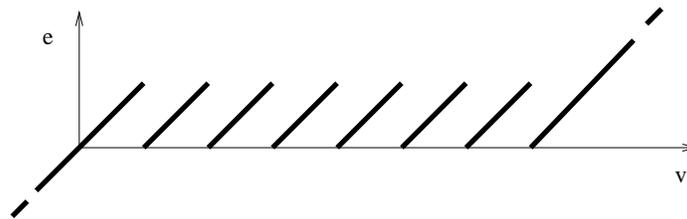
avec

$$\begin{aligned} x' &= x(1 + \rho(x^2 + y^2)) \\ y' &= y(1 + \rho(x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

où ρ est un paramètre. Une déformation de ce type pour $\rho > 0$ produit une image similaire à celle acquise à l'aide d'un grand angle appelé "œil de poisson", i.e. une lentille avec une longueur focale très petite (voir Figure 1.13).



(a)



(b)

FIG. 1.12 – Quantification d’une valeur réelle entre 0 et V_0 en utilisant 3 bits (8 niveaux). (a) La relation d’entrée-sortie du quantificateur. Notez comment le résultat est obtenu par troncation de la valeur d’entrée. En correspondance de chaque valeur de sortie une représentation possible sur 3 bits est montrée. (b) L’erreur de quantification est positive et plus petite que le pas de quantification Δ . Notez que les valeurs d’entrées en dehors de la gamme conçue $0 - V_0$ devraient mener à une erreur de quantification plus grande que Δ .



FIG. 1.13 – La déformation d’image peut être considérée comme un système qui transforme les signaux à deux dimensions. Sur la gauche, l’image originale (288×720 pixels). Sur la droite, l’image de sortie obtenue en posant $\rho = 2e - 6$.

Simulcam

Les systèmes peuvent être défini pour chaque type de signal. Voyons un exemple sur les vidéos. Il est appelé Simulcam est commercialisé par l’entreprise Dartfish à Fribourg (<http://www.dartfish.com>). L’idée est de prendre deux vidéos d’une certaine scène. Dans la scène se trouvent différentes personnes ou différents objets qui bougent. Nous choisissons une des deux séquences comme référence et nous voulons ajouter les objets de l’autre séquence sur la séquence de référence. Notez que les objets doivent être placés à leurs bonnes positions en tenant compte de la scène et du mouvement différent de la camera dans chacune des deux séquences.

Ce système est quelque peu complexe, mais il peut être décrit mathématiquement. Pour simplifier la notation, on définit l’ensemble des séquences vidéo en couleur

$$V = \{v | v : \mathbb{Z}^3 \rightarrow I_8^3\}.$$

Chaque séquence vidéo est représentée comme une fonction de trois indices, pour la position et le temps, à trois composantes couleurs représentés sur 8 bits. Maintenant nous pouvons définir Simulcam comme la fonction

$$s : V \times V \rightarrow V$$

c’est à dire, un système qui prend deux séquences vidéos et produit une séquence vidéo.

Afin de définir complètement le système nous avons besoin de spécifier ce que la fonction fait. Nous pouvons séparer le système en sous-systèmes. Le premier sous-système prend chaque image des deux vidéos et trouve la rotation de la caméra d’une séquence par rapport à l’autre séquence. Il serait compliqué d’expliquer les détails. Nous pouvons simplement supposer que ce système essaye différentes rotations dans le but de minimiser la différence sur la majorité des pixels de l’image. Le second sous-système prend les paramètres calculés par le premier bloc et la vidéo que nous allons ajouter à la séquence vidéo de référence. La sortie du block est une séquence



FIG. 1.14 – La superposition de deux séquences vidéos peut être considérée comme une transformation de signal tridimensionnelle.

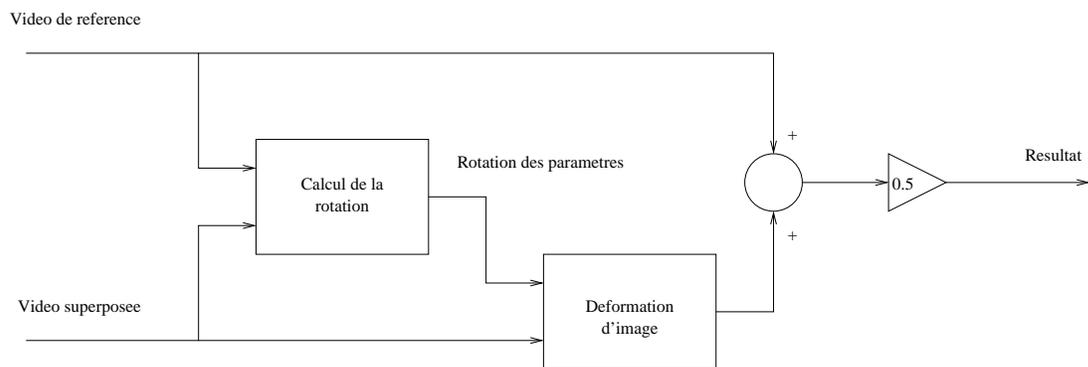


FIG. 1.15 – Diagramme simplifié de bloc d'un système pour la superposition de vidéo.

vidéo où la rotation de la camera a été compensée. Ceci est le système de déformation que nous avons vu, appliqué à chaque image de la séquence. Dans ce cas, les équations utilisées pour la déformation reproduisent la rotation de la camera. Le troisième bloc prend la séquence de référence et la séquence compensée et les combine afin de garder les objets mouvants des deux ainsi que l'arrière plan commun. On peut utiliser des techniques très sophistiquées pour une telle opération. Cependant, une moyenne des deux séquences donne déjà un résultat intéressant, même si les objets mouvants peuvent être quelque peu transparents.

Fonctions linéaires et systèmes

Voyons la définition d'une fonction linéaire. Supposons que A et B sont des ensembles sur lesquels l'addition de deux éléments et la multiplication par un nombre réel sont définies. Par exemple \mathbb{R} et \mathbb{C} sont de bons ensembles.

Définition 4. Une fonction f

$$f : A \rightarrow B$$

est une fonction linéaire si $\forall u \in \mathbb{R}$ et $a \in A$

$$f(ua) = uf(a)$$

et $\forall a_1, a_2 \in A$,

$$f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$$

La première propriété est appelée **homogénéité** et la seconde **additivité**. Lorsque le domaine de départ et le domaine d'arrivée sont \mathbb{R} , une fonction linéaire peut être représentée comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = kx$$

pour une certaine constante k . En fait il est facile de vérifier les propriétés d'homogénéité et d'additivité. Le terme "linéaire" vient du fait que le graphe d'une fonction est une ligne droite passant par l'origine, de pente k . Les deux propriétés d'homogénéité et d'additivité peuvent être combinées et donnent la propriété de **superposition** :

Définition 5. f est linéaire si $\forall a_1, a_2 \in A$ et $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$,

$$f(u_1a_1 + u_2a_2) = u_1f(a_1) + u_2f(a_2).$$

Un système est aussi une fonction, donc on peut se demander si un certain système est linéaire. Tout d'abord, nous devons comprendre quel est le domaine de départ et le domaine d'arrivée du système. Nous avons dit que ces ensembles peuvent contenir des signaux ou des séquences de symboles. Cependant, notons que nous ne pouvons pas définir l'addition et la multiplication de symboles. Par exemple, Vous ne pouvez pas ajouter deux fichiers de texte. Donc considérons uniquement les systèmes qui traitent des signaux et produisent des signaux.

Par exemple, prenons un système qui transforme un signal temps continu en un autre signal à temps continu. Dans ce cas,

$$A = B = \{s | s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Nous pouvons définir l'addition de deux éléments de A comme

$$(a_1 + a_2)(t) = a_1(t) + a_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et la multiplication par une quantité réelle $u \in \mathbb{R}$ comme

$$(ua)(t) = ua(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Avec ces définitions, toutes les opérations dans la définition de la linéarité sont définies et nous pouvons donc discuter la linéarité d'un système. Considérons par exemple le système

$$\begin{aligned} d : A &\rightarrow A \\ s(t) &\mapsto s(t-1) \end{aligned}$$

c'est à dire, le système d retarde le signal d'entrée d'une seconde. Est-ce que ce système est linéaire ? Nous vérifions cela en utilisant la propriété de superposition de deux signaux génériques et de constantes :

$$\begin{aligned} d(u_1s_1(t) + u_2s_2(t)) &= d((u_1s_1)(t) + (u_2s_2)(t)) = d((u_1s_1 + u_2s_2)(t)) \\ &= (u_1s_1 + u_2s_2)(t-1) = u_1s_1(t-1) + u_2s_2(t-1) \\ &= u_1d(s_1(t)) + u_2d(s_2(t)). \end{aligned}$$

Notons que la troisième égalité est une conséquence du système particulier que l'on considère, et les autres égalités des opérations définies sur les signaux.

Montrons maintenant que la quantification n'est pas un système linéaire. Prenons par exemple un quantificateur qui convertit les nombres réels en nombres entiers représentés sur 8 bits :

$$q : [\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}] \rightarrow [\mathbb{Z} \rightarrow I_8]$$

Supposons que q convertit la valeur du signal d'entrée au plus proche entier sur 8 bits. Par exemple, 12.3 est converti à 12, mais 12.7 est converti à 13. A ce stade, il est facile de voir que le quantificateur n'est pas linéaire. En fait, par exemple

$$q(4.3 + 5.4) = q(9.7) = 10$$

mais

$$q(4.3) + q(5.4) = 4 + 5 = 9$$

Puisqu'il existe au moins deux signaux d'entrée pour lesquels la propriété d'additivité n'est pas vérifiée, le système n'est pas linéaire.

Nous avons vu que nous avons besoin de quantification pour traiter les signaux avec un ordinateur. Cela implique que la plupart des systèmes que nous pouvons construire ne sont pas linéaires. Cependant, en pratique, la quantification est conçue de sorte qu'elle introduise uniquement de petites erreurs sur le signal d'entrée. Donc les ingénieurs continuent de parler de linéarité de certains systèmes en négligeant les non-linéarités introduites par les quantificateurs.

Nous pouvons vérifier que même les systèmes complexes tels que la déformation des images et Simulcam sont linéaires, lorsque les valeurs des pixels sont supposées appartenir à \mathbb{R} . Nous avons simplement besoin de définir l'addition de deux images (et deux vidéos) et la multiplication par une constante. Le résultat découle très facilement de la définition de la linéarité.

1.1.4 Exercices

1. Donnez des exemples de phénomènes physiques que vous rencontrez dans la vie de tous les jours que vous pouvez décrire avec des signaux. Quels sont le domaine de départ et le domaine d'arrivée des signaux utilisés ? Quelle est leur dimension ?
2. Donnez des exemples de signaux dans les espaces suivants :
 - (a) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$
 - (b) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 - (c) $\{0, 1, \dots, 600\} \times \{0, 1, \dots, 600\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 255\}$
 - (d) Décrivez une application pratique pour l'espace précédent. Qu'est-ce que représente un signal dans cet espace ?
3. Dessinez les graphiques des signaux suivants :

$$\text{Triangle}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > 1 \\ 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \end{cases}$$

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\delta_{-2}(t) = \int_{-\infty}^t \delta_{-1}(\tau) d\tau$$

$$\text{Somme}(t) = \text{Triangle}(t) + \delta_{-1}(t)$$

$$\text{Diff}(t) = \text{Triangle}(t) - \delta_{-1}(t)$$

$$\text{Sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

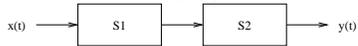
4. Quelles sont l'amplitude, la fréquence et la phase du signal :

$$x(t) = 5 \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) ?$$

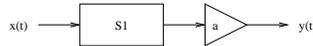
Quelle est la période de $x(t)$?

5. Nous avons vu que la sinusoïde (à temps continu) est un signal périodique. Est-ce que la somme de deux sinusoïdes est aussi périodique ? Dans quelles conditions ? Quelle est la période ?
6. Dessinez le graphique de $x(t) = 5 \cos(10t + \frac{\pi}{2}) + 2.5 \sin(5t)$. Montrez que $x(t)$ est périodique. Quelle est la période ?
7. On veut sauvegarder des images sur un disque dur en utilisant le minimum de place possible. A l'origine les images se trouvent en mémoire. Chaque image a la même taille de 768×1024 pixels. La couleur de chaque pixel est représentée en mémoire avec 24 bits. On sait que dans chaque image il n'y a que 16 couleurs utilisées mais on ne connaît pas à l'avance lesquelles. Les 16 couleurs peuvent être différents pour chaque image. Comment est-ce qu'on peut organiser la représentation de l'information afin de minimiser la place occupée sur le disque ? Quelle est le nombre de bits nécessaire pour sauvegarder chaque image ?

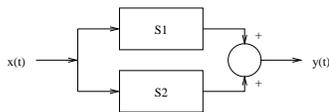
8. Donnez des exemples de systèmes où l'information est organisée de façon hiérarchique. Quels sont les signaux utilisés pour représenter l'information au niveau physique? Quels sont les symboles utilisés pour les autres niveaux? Connaissez-vous des systèmes qui élaborent l'information à chaque niveau?
9. Il y a une grande différence entre les ensembles A , B et $S = \{s | s : A \rightarrow B\}$ (ensemble de signaux de A en B). Cet exercice explore ces différences.
- Supposez $A = \{x, y, z\}$ et $B = \{0, 1\}$. Faites une liste de toutes les fonctions de A en B , c'est à dire les éléments de S . Une partie du problème est de trouver un moyen de lister les fonctions.
 - Si A a m éléments et B n , combien d'éléments a S ?
 - Supposez que $A = \{0, \dots, 287\} \times \{0, \dots, 719\}$ et B est l'ensemble de couleur représentable avec 24 bits. Pouvez-vous donner une estimation du nombre d'éléments de S dans la forme 10^n , $n \in \mathbb{Z}$?
10. Supposons que les systèmes S_1 et S_2 soient linéaires et qu'ils soient construits pour traiter des signaux à temps continu. Connectons les deux systèmes comme dans les figures suivantes, cela permet de construire des systèmes plus complexes. Dans les trois figures le signal à l'entrée du système total est indiqué avec $x(t)$, le signal de sortie est indiqué avec $y(t)$ et α est une constante réelle. Le système total est-il aussi linéaire?



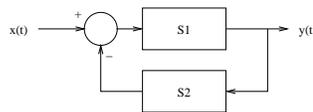
(a)



(b)



(c)



(d)

1.2 Filtrage

1.2.1 Introduction

Dans cette leçon nous verrons un type spécial de système que nous appelons **filtres**. Je suis sûr que vous avez une intuition de ce qu'est un filtre. C'est un dispositif qui permet d'éliminer quelque chose que nous "n'aimons pas" tout en gardant quelque chose que nous "aimons". Bien sûr, ce que nous aimons et ce que nous n'aimons pas est relatif à l'application. Vous utilisez probablement un navigateur pour accéder à l'Internet. Lorsque vous voulez trouver des pages traitant d'un certain sujet, vous utilisez un moteur de recherche, choisissant une liste de mots clés. Nous pensons aux mots clés comme une description du filtre et le moteur de recherche comme une procédure appliquée aux données d'entrée, i.e. les pages disponibles sur l'Internet.

Souvent, vous ne voulez pas (ou plus probablement vous ne pouvez pas) éliminer le signal "perturbant" mais vous voulez simplement réduire son niveau. Par exemple, si vous avez une chaîne HiFi, vous avez probablement quelques contrôles de la tonalité. Lorsque vous mettez les contrôles sur "off" toutes les fréquences sont mises au même niveau par le système. C'est à dire, si vous imaginez que l'entrée d'un système est une sinusoïde pure, vous obtenez le même niveau indépendamment de la fréquence de la sinusoïde. Si vous changez le contrôle de la tonalité, le son sera différent pour certaines fréquences. Ceci est aussi un type de filtre. Il existe beaucoup d'autres exemples de filtres dans la nature. En fait, tous les systèmes que nous trouvons dans la nature, i.e. tous les phénomènes pour lesquels vous pouvez définir une entrée et une sortie, montrent un comportement de "filtre". La plupart d'entre eux sont des "passe-bas", c'est à dire, lorsque vous envoyez une sinusoïde à l'entrée, vous observez que l'amplitude décroît pour les hautes valeurs de la fréquence. Vous ne remarquez pas cela avec le système HiFi, mais si vous le mesurez dans un laboratoire, vous trouveriez un comportement "passe-bas". Cependant, nos oreilles sont aussi des passe-bas donc ce n'est pas un problème.

Un exemple numérique : la moyenne mobile

Voyons maintenant un autre exemple qui concerne les signaux à temps discret. On l'appelle la **moyenne mobile**. Nous considérons un signal à temps discret qui est affecté par des erreurs. Prenez par exemple les notes que vous obtenez à chaque examen ou le nombre de buts marqués au dernier match de hockey. Dans les deux cas vous pouvez penser que le résultat est relié à votre effort réel et à une perturbation aléatoire que vous ne pouvez pas contrôler (par exemple, le jour de votre examen vous étiez malade ou bien le professeur était mauvais, etc.). Nous pouvons écrire

$$g(n) = s(n) + e(n),$$

i.e, la note $g(n)$ que vous obtenez à un examen n est le résultat de vos compétences $s(n)$ plus un terme d'erreur $e(n)$. Supposez que vous voudriez savoir vos compétences réelles, par exemple pour vérifier si vous vous améliorer et à quel taux. Comment feriez vous cela ? Une idée serait de calculer la moyenne à la fin de chaque année. C'est une solution, mais vous avez besoin d'attendre une année entière pour avoir une nouvelle valeur et peut être faire des contre-mesures (p.ex. travailler plus dur). Vos compétences changent également dans le temps, donc

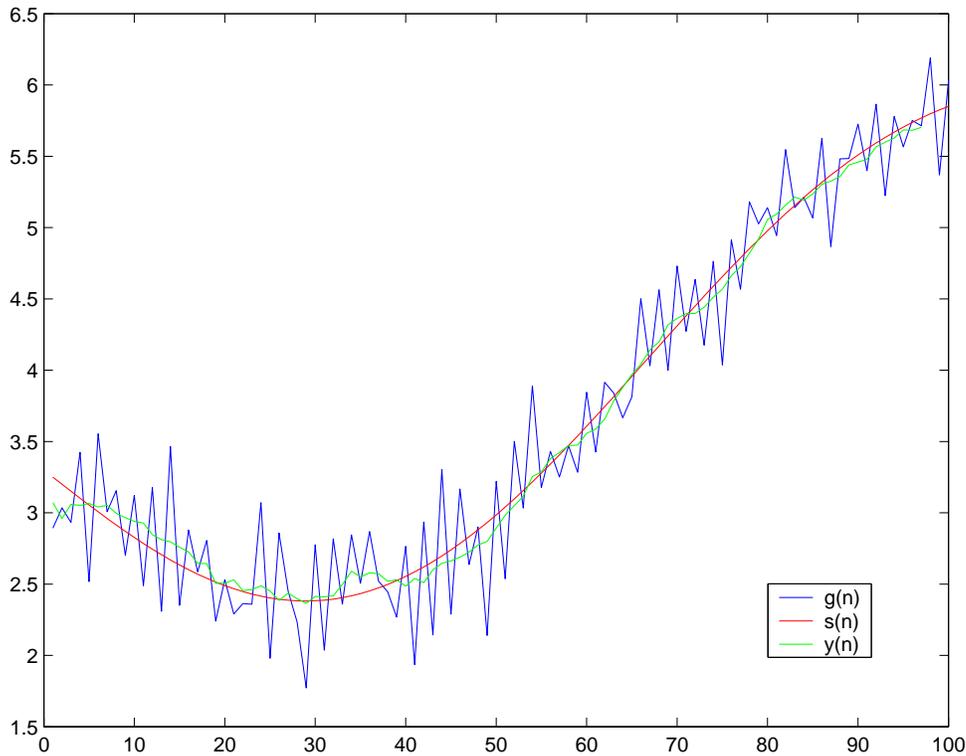


FIG. 1.16 – Exemple de moyenne mobile d’un signal bruité $g(n)$. $s(n)$ est le signal original pas affecté par l’erreur. $y(n)$ est le signal filtré obtenu avec une moyenne mobile de longueur $L = 8$.

une moyenne sur une année cacherait un tel changement en donnant seulement une seule figure. Une meilleure solution est de recalculer la moyenne à chaque examen, en prenant en compte les L derniers examens. Pourquoi ne pas prendre en compte *tous* les examens depuis le début des études ? Parce que nous voulons être capables de voir l’évolution de nos compétences, i.e. le signal $s(n)$. Si l’on moyenne trop de valeurs le résultat est de moins en moins influencé par la dernière note. D’un autre côté, si L est trop petit, la moyenne est trop perturbée par les termes d’erreur qui sont modérément atténués seulement. En conclusion, la longueur L de la moyenne est un compromis entre l’atténuation des erreurs et la vitesse de réaction du système aux variations du signal $s(n)$.

Dans la Figure 1.16, un exemple de filtrage utilisant la moyenne mobile est montré. Vous notez que les mesures $g(n)$ sont très irrégulières à cause des erreurs. Le signal filtré $y(n)$ est obtenu en utilisant une moyenne mobile de longueur $L = 8$. Nous remarquons que $y(n)$ est assez proche du signal sans erreurs $s(n)$ montrant que la méthode est effective.

Quelques propriétés générales des filtres

Nous avons vu trois exemples de filtres. Le premier opérait sur des symboles (les pages web), le second sur des signaux à temps continu (les signaux audio) et le troisième sur des signaux à

temps discret (une séquence de valeurs numériques). Peut-on trouver des propriétés communes à ces filtres? La première chose que l'on note est que le "schéma" qu'on applique pour calculer le résultat reste le même dans le temps. Par exemple, le moteur de recherche proposera les mêmes pages web si les pages restent les mêmes. En d'autres termes, les filtres ne vieillissent pas ou n'apprennent pas du passé. Nous appelons cette propriété **l'invariance-temps**. Notons que nous pouvons imaginer des systèmes plus complexes qui ne sont pas invariant dans le temps. Par exemple, le moteur de recherche peut se souvenir des pages auxquelles nous avons accédé dans le passé pour proposer de meilleurs résultats pour les prochaines recherches.

La seconde propriété que ces filtres satisfont est si apparente que vous ne l'avez probablement pas remarquée. Elle est appelée **causalité** et cela signifie que vous ne pouvez pas obtenir une sortie du filtre avant d'y appliquer une entrée. Par exemple, vous ne pouvez pas connaître la moyenne mobile de vos notes de la quatrième année alors que vous êtes en première année! Cela semble trivial, nous disons simplement que nous ne pouvons pas prédire le futur.

Dans les sections suivantes, nous allons considérer uniquement les systèmes travaillant sur des signaux et en particulier les systèmes à temps discret. Nous verrons aussi plus formellement les propriétés d'invariance dans le temps et de causalité pour ces systèmes.

1.2.2 Fonction impulsionnelle. Réponse impulsionnelle

Définissons un signal qui sera très utile dans ce qui suivra. Il est appelé **impulsion** ou **fonction Kronecker delta**. Nous le définissons en temps discret mais le concept peut être également défini en temps continu.

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{if } n \neq 0 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Comme vous pouvez le constater, l'impulsion est un signal très simple. Maintenant, nous voulons l'utiliser afin d'analyser le comportement d'un système à temps discret. Supposons que nous envoyons l'impulsion à l'entrée d'un système et que nous mesurons la sortie du système. La sortie, $h(n)$ est un signal à temps discret que nous appelons **réponse impulsionnelle**.

A ce stade, je dois préciser que ce que nous avons fait est mathématiquement correct mais infaisable en pratique. En fait, supposons que quelqu'un nous donne une "boite noire" avec une entrée et une sortie et que nous voulons mesurer la réponse impulsionnelle. Nous voudrions envoyer l'impulsion à l'entrée. Cependant, l'impulsion est définie sur tout l'axe \mathbb{Z} et elle vaut zéro pour les valeurs négatives. Cela signifie que, où que l'on positionne l'origine des coordonnées temporelles, ne devons garantir que la boite noire ait reçu uniquement des zéros à son entrée avant d'appliquer l'impulsion! Ceci est un problème commun que les ingénieurs rencontrent dans leur travail. Nous faisons certaines hypothèses sur la réalité et qui nous permettent de décrire le problème mathématiquement. A la fin, il peut y avoir quelques différences entre ce qui est prédit à propos du modèle et ce que nous mesurons sur un système réel.

1.2.3 L'invariance dans le temps

Que se passe-t-il si l'on translate l'impulsion le long de l'axe du temps ? Une impulsion retardée est représentée par $\delta(n-m)$, où m est le retard et correspond à la position du "1" de l'impulsion. Supposons que nous envoyons cette impulsion retardée à un système linéaire, que mesurons-nous à la sortie ? Nous pouvons appeler le signal à la sortie $\bar{h}(n, m)$, une fonction générique de deux variables entières. Bien sûr, lorsque $m = 0$ l'impulsion est positionnée en 0 et nous obtenons la réponse impulsionnelle définie dans la section précédente, i.e. $\bar{h}(n, 0) = h(n)$. Qu'arrive-t-il pour d'autres valeurs du retard ? On peut penser que la sortie est retardée par le même retard qu'à l'entrée. En d'autres termes, si vous translatez le signal d'entrée, le signal de sortie est aussi translaté de la même façon. Ceci est la propriété d'invariance dans le temps que nous avons mentionnée plus tôt. Nous pouvons maintenant donner la définition suivante :

Définition 6. *Un système linéaire discret est **invariant dans le temps** si la réponse impulsionnelle $\bar{h}(n, m)$ satisfait :*

$$\bar{h}(n, m) = h(n - m) \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Peut-on vérifier l'invariance dans le temps pour un certain système physique ? Comme discuté dans le paragraphe précédent, nous ne pouvons pas générer et mesurer des signaux sur l'axe réel complet. Nous pouvons seulement le vérifier pour les signaux de durée finie et sous des hypothèses appropriées. De plus, un système qui est invariant dans le temps sur le court terme peut montrer une variance dans le temps sur un plus long terme. Par exemple, les composants électroniques peuvent vieillir après un certain temps. La même chose se passe en fait avec tous les systèmes physiques. Cependant, beaucoup de systèmes sont invariants dans le temps sur une échelle de temps "raisonnable". En particulier, les systèmes numériques sont extrêmement stables dans le temps, au moins jusqu'à ce qu'ils se cassent (une défaillance peut aussi être considérée comme une forme d'invariance dans le temps). Ceci est une des principales qualités qui motive l'utilisation des systèmes numériques.

1.2.4 Définition d'un filtre

Définition 7. *Un filtre est un système qui possède les propriétés suivantes :*

1. *Il est linéaire.*
2. *Il est invariant dans le temps.*
3. *Le domaine du signal d'entrée coïncide avec le domaine du signal de sortie.*

Puisque les domaines des signaux d'entrée et de sortie sont les mêmes, nous avons seulement deux types de filtres unidimensionnels : temps discret et temps continu. Nous pouvons considérer des signaux plus complexes et définir des filtres sur des signaux multidimensionnels, tels que les images ou les vidéos ou bien les signaux vectoriels comme les images en couleur ou les vidéos en couleur.

Dans cette leçon nous discuterons uniquement des filtres à temps discret. Dans ce qui suit, nous montrons qu'ils sont complètement décrit par leur réponse impulsionnelle $h(n)$.

1.2.5 Causalité

Retournons à la définition de la réponse impulsionnelle. Nous avons appliqué une impulsion à l'entrée d'un système linéaire et nous avons mesuré la sortie. Nous appelons la sortie $h(n)$ la réponse impulsionnelle. Si nous pensons à la partie négative de l'axe du temps $n < 0$, nous voyons que la réponse impulsionnelle est constamment nulle. Cela signifie que nous imaginons d'appliquer une série de zéros au système commençant infiniment loin dans le passé. Si le système que nous analysons correspond à un système physique, nous pouvons supposer que durant cette durée infinie, il atteint un état "équilibré", i.e. la sortie est aussi zéro². Supposons que nous fixons la sortie du système à zéro en correspondance avec l'état d'équilibre (nous réglons simplement l'échelle du dispositif de mesures de façon appropriée). A ce stade, est-il possible d'avoir quelque chose différent de zéro (l'état d'équilibre) dans la région $n < 0$ de la réponse impulsionnelle? Par exemple, si j'ai mesuré $h(-10) = 1$ cela voudrait dire que quelque chose se passe à la sortie pour $n = -10$, **avant** que je fasse quelque chose à l'entrée! Je sais que le système était à l'équilibre, donc je ne peux pas expliquer la sortie avec quelque chose qui est arrivé au système de façon interne et qui n'est pas relié à l'entrée. Par conséquent, j'en conclurais que le système est capable de "prédire" le futur : il sait quand est ce que je vais envoyer une impulsion à l'entrée et produit une sortie 10 échantillons en avance. Il semblerait que, si nous négligeons les voyages dans le temps et les clairvoyants, nous devons exclure cette possibilité, au moins pour les systèmes physiques.

Définition 8. *Un système linéaire est **causal** si la réponse impulsionnelle $h(n)$ satisfait :*

$$h(n) = 0 \quad \forall n < 0.$$

Est-ce que la causalité est un principe universel? Lorsque le domaine des signaux est le temps, la réponse est oui. Cependant, au moins formellement vous pouvez avoir une non-causalité pour les systèmes qui traitent des signaux non-temporels. Par exemple, une image est un signal défini sur deux coordonnées spatiales. Un système qui traite les images peut accéder à tout le domaine de l'image d'entrée, donc la réponse impulsionnelle peut être non-causale. Par exemple, supposez que vous avez un appareil photo et que vous prenez une photo d'un point noir sur une surface blanche. Vous prenez la photo en réglant la mise au point à la mauvaise valeur, donc l'image apparaîtra floue. Vous pouvez voir l'image comme un système qui prend l'image d'entrée du point noir et produit comme résultat l'image floue. Si le point noir est très petit, nous pouvons le considérer comme une fonction impulsionnelle, donc l'image de sortie est la réponse impulsionnelle correspondante. Nous observons que sur l'image de sortie l'effet de l'impulsion est propagé le long de toutes les directions et le résultat est un point large. Donc, dans la description mathématique du système, nous pourrions utiliser une réponse impulsionnelle qui est non-causale.

1.2.6 Stabilité

Dans cette section, nous voulons parler de stabilité et des relations entre stabilité et réponse impulsionnelle. Qu'est ce que la stabilité? Assurément, vous avez une intuition de ce qu'est un

²cela peut ne pas être le cas pour certains systèmes particuliers, tel que le pendule sans frottement

système stable. En fait, vous dites qu'un système est stable si la sortie ne croît pas trop lorsque l'entrée est limitée. Certainement, lorsque vous calculez la moyenne mobile de vos notes, il serait très étrange de voir que le résultat croît indéfiniment si vos notes sont médiocres !

Ce type de stabilité est appelé Entrée limitée Sortie limitée ou Bounded Input Bounded Output (BIBO). Formellement, la définition est :

Définition 9. *Un filtre avec une entrée $x(n)$ est une sortie $y(n)$ est **stable** si*

$$\forall x \in \{s \mid s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad |x(n)| \leq N, \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow |y(n)| \leq M, \forall n \in \mathbb{Z}$$

pour des constantes réelles positives N et M appropriées.

En d'autres termes, si l'entrée reste dans l'intervalle $(-N, N)$, i.e. est limité, le signal de sortie est dans l'intervalle $(-M, M)$. Notons que nous sommes libres de choisir les deux constantes N et M . Par exemple, le système $y(n) = 10^6 x(n)$ est stable. Vous choisissez simplement par exemple, $N = 1$ et $M = 10^6$. Le fait que le système amplifie le signal d'entrée à ce point n'a pas d'importance, puisque le signal de sortie reste limité. Inversement, si vous prenez le système linéaire avec réponse impulsionnelle,

$$h(n) = e^n$$

Vous avez un système instable. En fait, si vous envoyez à l'entrée une impulsion, qui est une entrée limitée, vous obtenez $h(n)$. Vous vous souvenez que l'exponentielle croît indéfiniment, lorsque n augmente, donc vous ne pouvez pas trouver une limite pour le signal de sortie.

La définition de la stabilité est valable pour tout type de système, même les systèmes non-linéaires. Ici, nous considérons les systèmes linéaires et nous donnons une condition de stabilité basée sur la réponse impulsionnelle. De l'exemple précédent, il est clair que la réponse impulsionnelle d'un système stable ne peut pas diverger. Il peut être démontré que la stabilité implique une condition plus restrictive sur la réponse impulsionnelle. En fait, nous avons le théorème suivant.

Théorème 1. *Un système linéaire invariant dans le temps est stable si et seulement si la réponse impulsionnelle $h(n)$ est absolument sommable, i.e.*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| < \infty.$$

Par exemple, la réponse impulsionnelle

$$h(n) = \begin{cases} \rho^n & \text{if } n \geq 0 \\ 0 & \text{if } n < 0 \end{cases},$$

est stable si $|\rho| < 1$

1.2.7 Convolution de signaux

Dans cette section, nous verrons qu'un système linéaire invariant dans le temps est complètement spécifié par sa réponse impulsionnelle, i.e. nous pouvons décrire entièrement la relation entre les signaux d'entrée et de sortie.

La relation peut être déterminée facilement, en décomposant le signal d'entrée $x(n)$ en une somme d'impulsions translatées. En fait, nous avons

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m). \quad (1.6)$$

Nous pouvons vérifier cette relation en prenant une valeur particulière de $n = n_0$. Toutes les impulsions de la somme ont leur "1" à des positions différentes. Pour $n = n_0$, il n'y a que l'impulsion à la position $m = n_0$ qui a la valeur 1 et le terme qui multiplie l'impulsion est $x(n_0)$. Ceci est valable pour toute valeur de n_0 , donc l'identité est vérifiée.

Supposons que nous envoyons le signal $x(n)$ au filtre \mathcal{H} de réponse impulsionnelle $h(n)$. Comment peut-on calculer la sortie $y = \mathcal{H}(x)$? Nous savons que le filtre est un système linéaire, i.e. la sortie d'une somme *finie* de signaux est la somme des sorties de chaque signal. Si nous ajoutons la condition que le filtre est stable, le filtre \mathcal{H} est une fonction continue sur l'espace des signaux d'entrée³. En d'autres termes, nous pouvons appliquer le principe de superposition même pour des sommes infinies convergentes du type de (6).

Nous savons qu'à chaque impulsion translatée $\delta(n-m)$ la sortie est $h(n-m)$ par invariance dans le temps. Par conséquent, la sortie est simplement la somme des sorties de chaque impulsion (voir Figure 1.17)

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m).$$

Nous appelons cette somme la **convolution** entre le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle du filtre. Nous l'écrivons en utilisant la notation $y(n) = (x * h)(n)$.

Vérifions quelques propriétés de la convolution. Tout d'abord la **commutativité**, i.e.

$$(x * h)(n) = (h * x)(n).$$

En fait, si on définit $m_0 = n - m$ et qu'on élimine m dans la somme on a

$$(x * h)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m_0=-\infty}^{\infty} x(n-m_0)h(m_0) = (h * x)(n).$$

Cela signifie que le résultat est le même si l'on intervertit le signal d'entrée avec la réponse impulsionnelle, i.e. un filtre de réponse impulsionnelle x et une entrée h donnerait le même résultat.

³La preuve est simple mais elle demanderait certains concepts sur les espaces métriques que vous verrez en deuxième année.

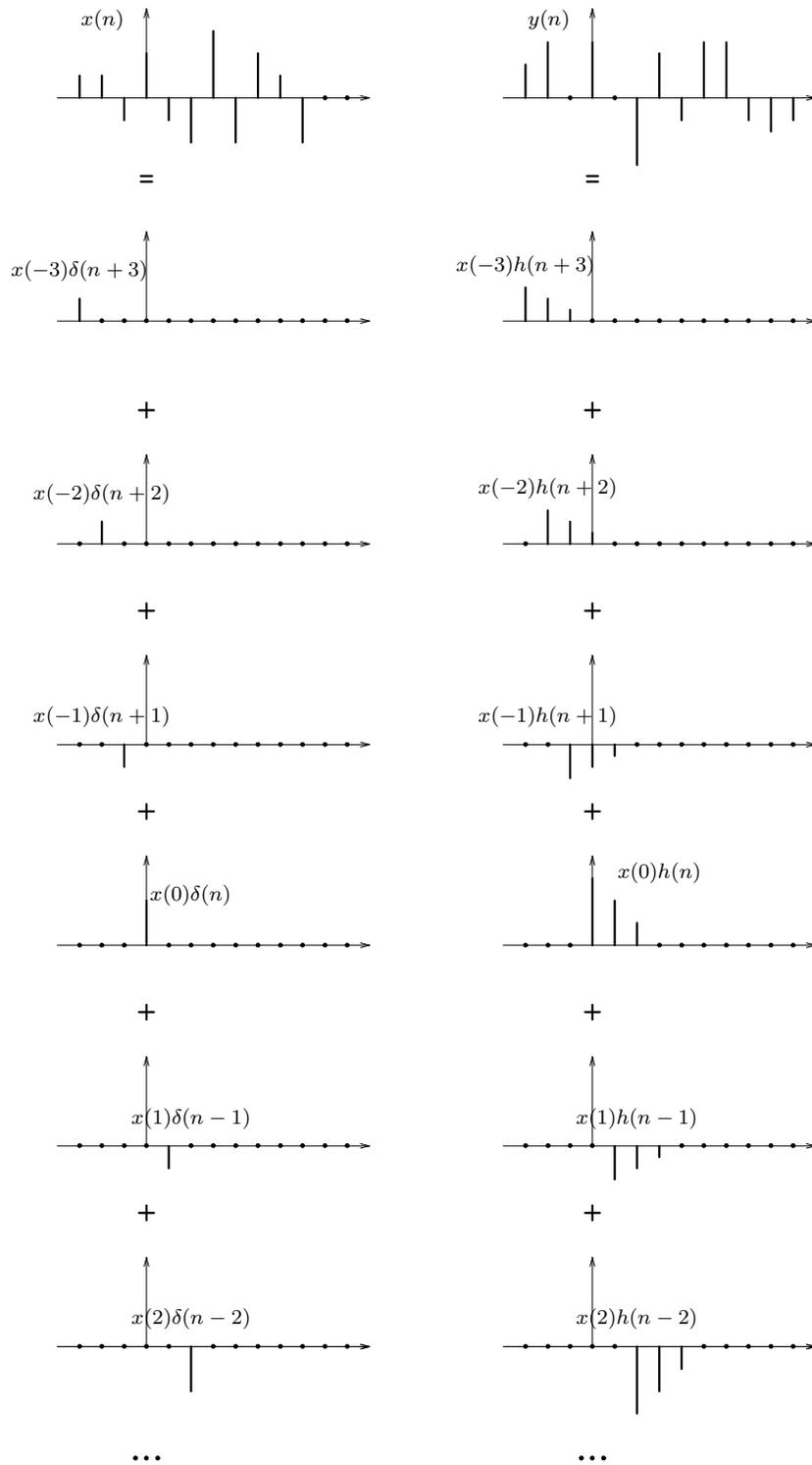


FIG. 1.17 – Relation d'entrée-sortie d'un filtre. Sur la colonne de gauche, le signal d'entrée $x(n]$ est décomposé en une somme pondérée d'impulsions. La sortie $y(n]$ est obtenue en sommant la réponse impulsionnelle après translation et pondération correspondant à chaque impulsion à l'entrée.

La convolution est **linéaire**, puisque c'est la relation d'entrée-sortie d'un système linéaire. Cela signifie que

$$(u_1x_1 + u_2x_2) * h = u_1(x_1 * h) + u_2(x_2 * h).$$

La propriété **d'associativité** permet de grouper arbitrairement une chaîne de convolutions :

$$(x * h_1) * h_2 = x * (h_1 * h_2)$$

Cela signifie que nous pouvons remplacer une cascade de deux filtres h_1, h_2 par un seul filtre $h_1 * h_2$. En prenant en compte la commutativité, nous notons aussi que dans une chaîne de filtres le résultat ne dépend pas de l'ordre du filtre.

Exemple de convolution

Normalement, nous utilisons des ordinateurs pour calculer la convolution de signaux. Cependant, il est utile d'apprendre comment calculer manuellement une convolution pour comprendre complètement comment cela fonctionne. Nous considérons l'exemple simple représenté dans la Figure 1.18. Le résultat est obtenu en prenant $h(n)$ et l'inverser par rapport à l'origine, i.e. on obtient $h(-n)$. A ce stade, on doit traduire $h(-n)$ le long de l'axe du temps. Pour chaque position m , la translation nous donne $h(m-n)$ qui sont les poids des valeurs $x(m)$. Nous calculons tous les produits $h(m-n)x(m)$ que nous additionnons pour obtenir le résultat $y(n)$.

Convolution d'une sinusoïde avec un signal

Maintenant que nous connaissons la convolution, nous pouvons calculer la sortie d'un certain filtre pour différents types de signaux d'entrée. Selon la réponse impulsionnelle du filtre et le signal d'entrée, nous pourrions remarquer que dans certains cas la sortie est relativement similaire à l'entrée. C'est le cas pour l'exemple de la Figure 1.18. L'amplitude du signal a changé et il y a une translation le long de l'axe temporel, mais la forme du signal de sortie est similaire à celle du signal d'entrée. Existe-t-il des signaux qui gardent exactement la même forme lorsqu'ils passent à travers un filtre ? La réponse est oui, et ces signaux sont les sinusoïdes ! Prenons $x(n) = \sin(\omega_d n)$ et calculons la convolution avec la réponse impulsionnelle $h(n)$. Une bonne méthode pour faire cela est d'utiliser l'exponentielle complexe. Rappelons que

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha).$$

Donc le signal d'entrée peut être écrit comme

$$x(n) = \text{Im}(e^{j\omega_d n}),$$

où "Im" est la partie imaginaire. L'avantage d'utiliser l'exponentielle complexe est que nous évitons d'utiliser les formules trigonométriques. Nous devons simplement se souvenir de prendre la partie imaginaire pour calculer le résultat. En fait,

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sin(\omega_d(n-m))h(m) = \text{Im} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_d(n-m)}h(m) \right).$$

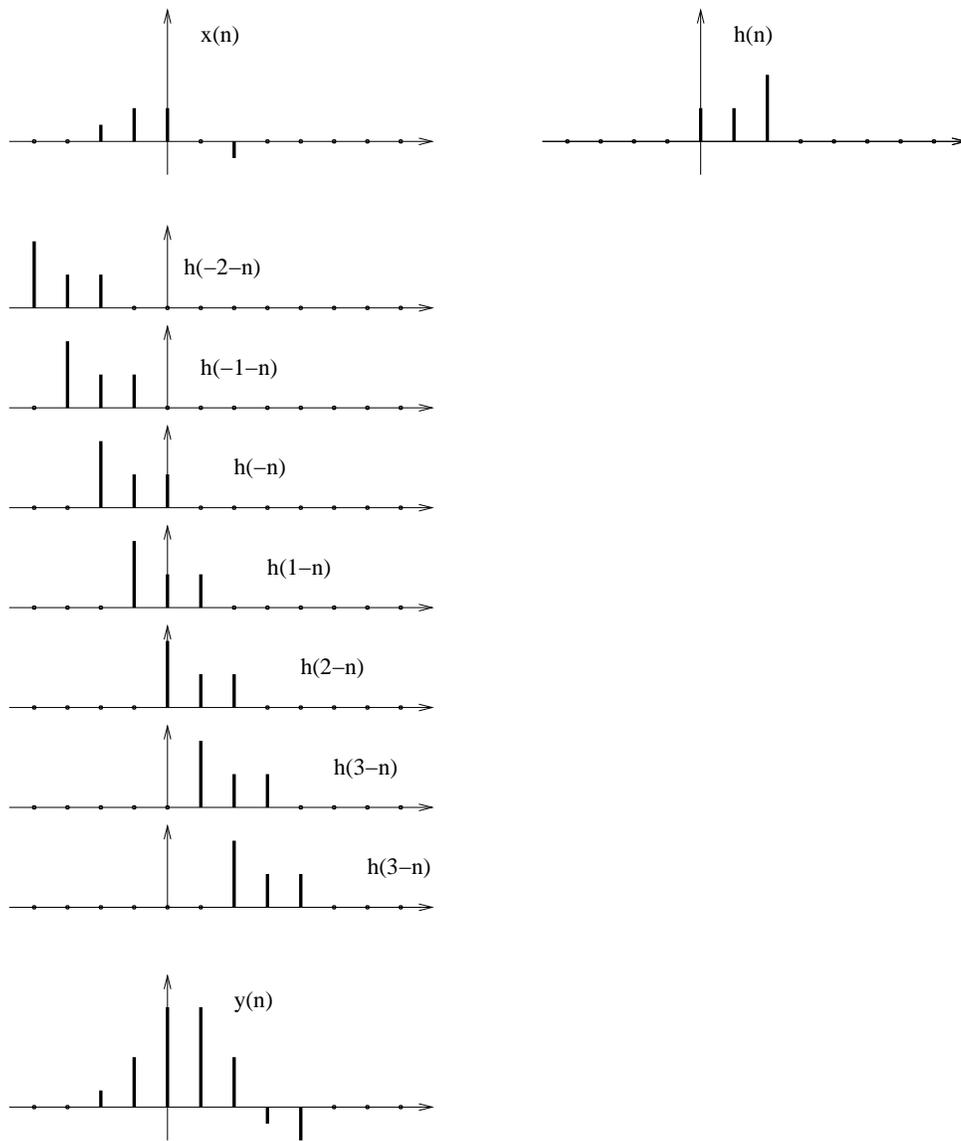


FIG. 1.18 – Convolution du signal x avec le filtre de réponse impulsionnelle h . Le résultat est calculé en considérant toutes les translations du signal $h(-n)$. Pour chaque position n la sortie correspondante est calculée en sommant les produits $h(n - m)x(m)$.

Maintenant, nous pouvons décomposer l'exponentielle en deux facteurs :

$$y(n) = \text{Im} \left(e^{j\omega_d n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_d m} h(m) \right).$$

Le terme $e^{j\omega_d n}$ ne dépend pas de m , donc il a été sorti de la somme. Nous remarquons que la somme n'est pas une fonction du temps n , i.e. c'est une valeur complexe qui dépend uniquement de la fréquence de la sinusoïde ω_d :

$$P(\omega_d) e^{j\phi(\omega_d)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_d m} h(m).$$

Vous remarquez que nous avons représenté la valeur complexe en coordonnées polaires : $P(\omega_d)$ est l'amplitude et $\phi(\omega_d)$ l'argument. Nous pouvons écrire la sortie du filtre comme,

$$y(n) = \text{Im}(P(\omega_d) e^{j\omega_d n + \phi(\omega_d)}) = P(\omega_d) \sin(\omega_d n + \phi(\omega_d)).$$

Par conséquent, la sortie est une sinusoïde d'amplitude $P(\omega_d)$ et de phase $\phi(\omega_d)$. Notez que l'amplitude et la phase sont des fonctions de la fréquence ω_d , i.e. si vous changez la fréquence de la sinusoïde, l'amplitude peut aussi changer.

Pourquoi les exponentielles complexes (ou les sinusoïdes) sont-elles si spéciales ? Voyons comment on calcule une convolution :

$$(x * h)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n - m) h(m)$$

i.e. le signal de sortie est obtenu en combinant des versions translatées du signal d'entrée. Pour les exponentielles complexes, lorsque vous prenez différentes translations et que vous les additionner, vous obtenez encore une exponentielle complexe. En fait, si

$$x(n) = e^{j\omega_d n},$$

les signaux translatés $x(n - m)$ peuvent être écrits comme

$$x(n - m) = e^{j\omega_d(n-m)} = e^{j\omega_d n} e^{-j\omega_d m} = x(n) e^{-j\omega_d m},$$

i.e. le résultat est le signal d'entrée multiplié par un nombre qui est une fonction du retard et de la fréquence. Ceci n'est pas une propriété générale des fonctions.

1.2.8 Filtres à réponse impulsionnelle finie (FIR)

Dans cette section on considère quelques filtres linéaires invariants dans le temps, pour lesquels la réponse impulsionnelle a une durée finie. C'est à dire,

$$h(n) = 0 \quad \text{if } n < 0 \quad \text{ou } n \geq L,$$

où L est un certain entier positif. Un tel système est appelé filtre **à réponse impulsionnelle finie** car la “partie intéressante” de la réponse impulsionnelle à une durée finie. A cause de cette propriété, la convolution devient une somme finie :

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m) = \sum_{m=0}^{L-1} x(n-m)h(m).$$

Cette équation suggère une façon d’implémenter facilement le filtre sur un ordinateur. Nous notons que pour produire la sortie au temps n , nous avons besoin du signal d’entrée au temps $n, n-1, \dots, n-L+1$. Ces valeurs seront stockées dans la mémoire de l’ordinateur. La réponse impulsionnelle est une série de coefficients que nous pouvons aussi stocker en mémoire. Un programme pour calculer la sortie prend simplement les valeurs de la mémoire d’entrée et les multiplie par le coefficient de la réponse impulsionnelle. Le résultat est obtenu en sommant tous les produits. Lorsqu’une nouvelle valeur est disponible à l’entrée, nous rejetons la plus vieille valeur que nous avons sauvée en mémoire et nous translatons les autres afin d’introduire la nouvelle valeur. La sortie est calculée en appliquant le même schéma.

Une remarque importante concernant les filtres *FIR* est qu’ils sont *toujours stables*, indépendamment des coefficients de la réponse impulsionnelle. Ceci est une conséquence directe du théorème 1.

Exemple : la moyenne mobile

Considérons à nouveau la moyenne mobile que nous avons vue au début de la leçon. Nous avons dit que la moyenne mobile des notes est obtenue en calculant la moyenne des L plus récentes notes. En utilisant les formules, on peut écrire

$$y(n) = \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} x(n-m) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ceci est exactement un filtre FIR de réponse impulsionnelle :

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{si } 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Mentionnons que le choix de L est le résultat d’un compromis entre le besoin de filtrer les erreurs $e(n)$ tout en gardant les variations des compétences $s(n)$. Voyons comment cela se passe. Supposons que les deux signaux $s(n)$ et $e(n)$ sont disponibles. Bien sûr, nous pouvons faire cela uniquement avec des données de simulation. Nous savons que le filtre est linéaire, donc cela revient au même de filtrer $g(n) = s(n) + e(n)$ que de filtrer $s(n)$ et $e(n)$ séparément et ensuite d’additionner le résultat. Par conséquent, nous pouvons considérer le comportement du filtre, en considérant les deux signaux séparément. Que se passe-t-il lorsque nous filtrons ces signaux avec des filtres de longueur différente ? Les résultats sont représentés sur la Figure 1.19. Nous notons comment les deux signaux $e(n)$ et $s(n)$ deviennent de plus en plus plats quand L augmente. Si vous imaginez que L tend vers l’infini (nous supposons ici que vous avez suffisamment de notes pour calculer d’aussi longues moyennes) le résultat de la moyenne mobile du signal d’erreur tend

vers zéro. En fait, nous avons supposé que les erreurs sont “équitables”, i.e. elles augmentent ou diminuent votre note avec la même probabilité. Pour le signal $s(n)$, lorsque L tend vers l’infini, nous lisons les variations de compétences et le résultat converge vers la moyenne de l’ensemble de toutes les mesures. Ce qui change entre le filtrage des deux signaux, c’est le taux avec lequel les résultats sont lissés par rapport à L . Par exemple, prenons $L = 8$. Vous voyez comment le signal d’erreur est déjà très atténué, alors que le signal $s(n)$ est toujours très similaire à l’original. Nous pouvons expliquer cela en remarquant que le signal d’erreur est très irrégulier, alors que $s(n)$ est lisse. En d’autres termes, le paramètre L contrôle la vitesse de variation des signaux qui passent à travers le filtre. En pratique, on pourrait faire certaines hypothèses sur les signaux $s(n)$ et $e(n)$ et on choisirait le compromis optimal pour le paramètre L . Vous pouvez imaginer que les meilleurs résultats sont obtenus lorsque le signal utile et l’erreur ont des comportements très différents.

Nous pouvons considérer l’analyse de la moyenne mobile en considérant un signal très simple, la sinusoïde. La fréquence de la sinusoïde représente la vitesse de variation mentionnée auparavant (plus haute est la fréquence, plus raide sera le signal). Nous savons que la sortie du filtre à une sinusoïde est aussi une sinusoïde. Par conséquent, nous pouvons étudier l’atténuation du filtre en analysant l’amplitude de la sinusoïde de sortie comme une fonction de la fréquence. Comme nous l’avons vu dans la section précédente, si le signal d’entrée est $x(n) = \sin(\omega_d n)$, la sortie sera

$$y(n) = \text{Im}(P(\omega_d)e^{j\omega_d n + \phi(\omega_d)}) = P(\omega_d) \sin(\omega_d n + \phi(\omega_d)),$$

où l’amplitude et la phase sont calculées par

$$P(\omega_d)e^{j\phi(\omega_d)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_d m} h(m).$$

Nous substituons $h(m)$ par la réponse impulsionnelle de la moyenne mobile et nous obtenons,

$$P(\omega_d)e^{j\phi(\omega_d)} = \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} e^{-j\omega_d m}.$$

Rappelons que la somme d’une suite géométrique est donnée par

$$\sum_{m=0}^{L-1} q^m = \frac{1 - q^L}{1 - q}.$$

Par conséquent,

$$P(\omega_d)e^{j\phi(\omega_d)} = \frac{1}{L} \frac{1 - e^{-j\omega_d L}}{1 - e^{-j\omega_d}}.$$

Si nous prenons en compte que

$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

nous pouvons continuer le calcul, obtenant

$$P(\omega_d)e^{j\phi(\omega_d)} = \frac{1}{L} \frac{e^{-j\omega_d \frac{L}{2}} \sin(\frac{\omega_d L}{2})}{e^{-j\omega_d \frac{1}{2}} \sin(\frac{\omega_d}{2})} = e^{-j\omega_d \frac{L-1}{2}} \frac{\sin(\frac{\omega_d L}{2})}{L \sin(\frac{\omega_d}{2})}.$$

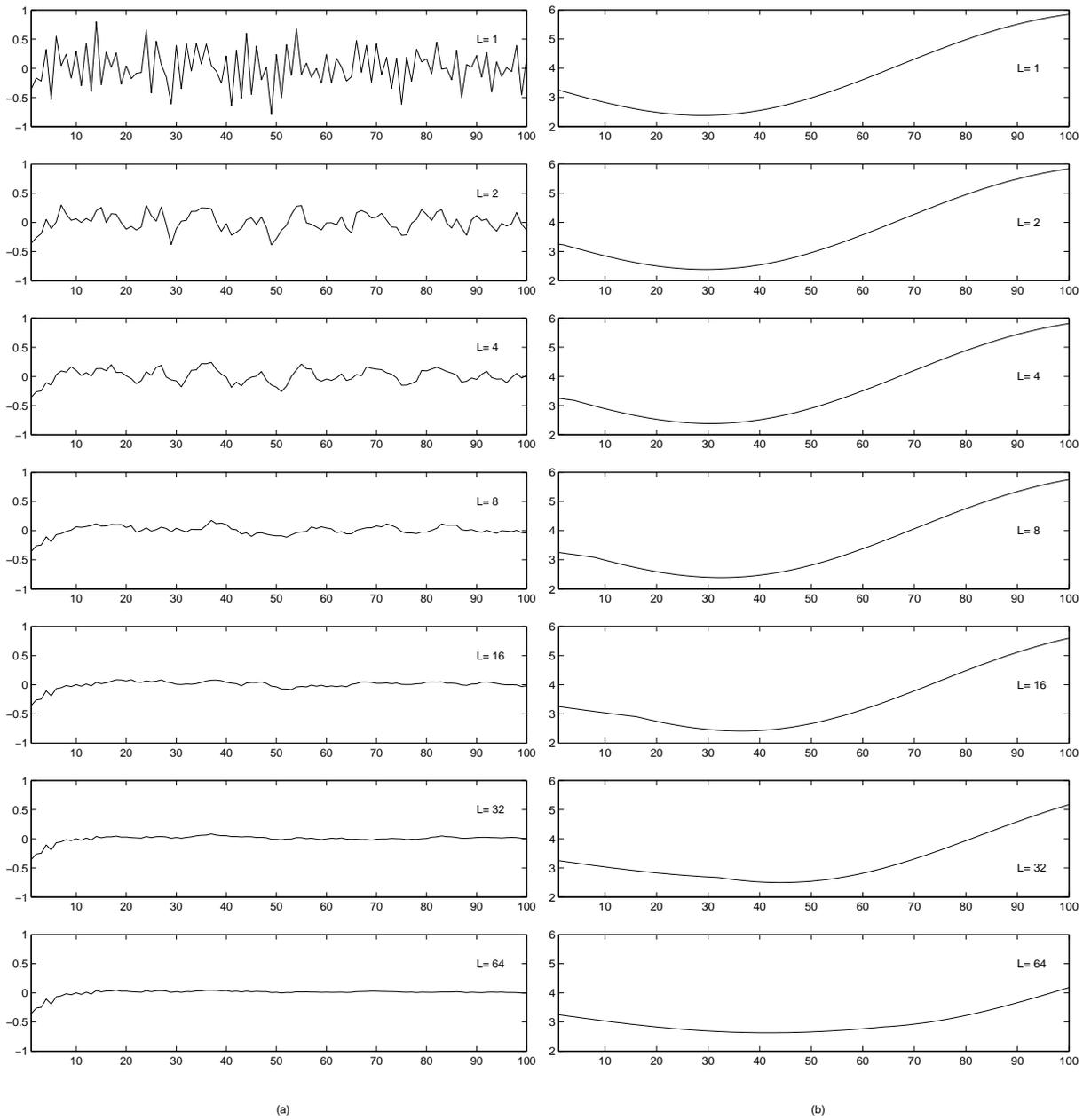


FIG. 1.19 – Moyenne mobile du signal d’erreur et du signal sans erreur. (a) Sortie de la moyenne mobile du signal d’erreur en utilisant différentes valeurs de la taille du filtre L . (b) Sortie du signal sans erreur pour les mêmes valeurs de L . Notez comment le signal d’erreur et le signal sans erreur sont lissés lorsque L croît. Le L optimal est la valeur qui donne le meilleur compromis entre l’atténuation de l’erreur et la non-distorsion du signal utile.

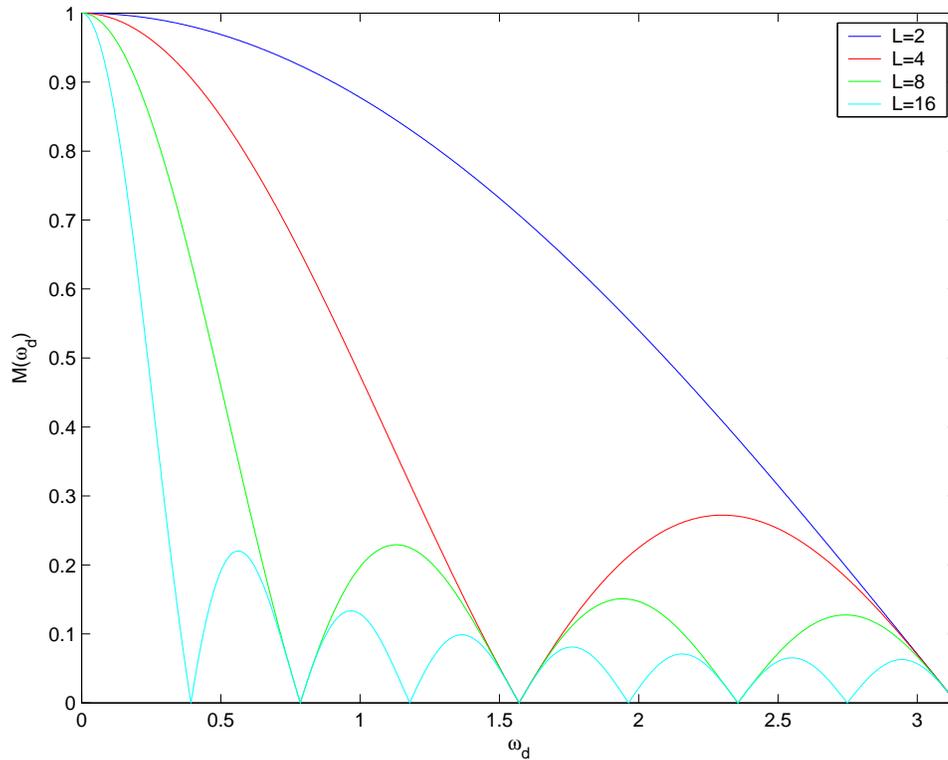


FIG. 1.20 – Amplitude d’une sinusoïde à la sortie du filtre à moyenne mobile comme une fonction de la fréquence. Le filtre montre un comportement “passe-bas”, i.e. les sinusoïdes de hautes fréquences sont fortement atténuées. La taille du filtre L contrôle l’atténuation et la gamme des fréquences que peut atteindre la sortie.

En conclusion,

$$P(\omega_d) = \left| \frac{\sin(\frac{\omega_d L}{2})}{L \sin(\frac{\omega_d}{2})} \right|.$$

Nous ajoutons la valeur absolue, car nous pouvons prendre en compte le signe dans le calcul de la phase ϕ (nous ajoutons π à la phase lorsque $P(\omega_d) < 0$).

Dans la Figure 1.20, $P(\omega_d)$ est représenté pour différentes valeurs de L . Comme prévu, nous notons comment l’amplitude décroît pour les hautes fréquences, donc le filtre est en fait un “passe-bas”. Nous voyons également comment le paramètre L contrôle l’atténuation des hautes fréquences.

Conception de filtres FIR

Nous avons vu qu’un filtre est complètement décrit par sa réponse impulsionnelle. Lorsque vous changez la longueur et les coefficients d’un filtre FIR vous obtenez des performances différentes. C’est ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent avec le paramètre L de la moyenne

mobile. Le paramètre était choisi selon le type d'évolution du signal utile et du signal d'erreur. De la même façon, nous pouvons considérer de changer chaque paramètre de la réponse impulsionnelle. Une analogie en temps continu est l'equalizer d'une chaîne HiFi. Lorsque vous tournez les boutons, vous changez le comportement du filtre. De la même façon, il existe des outils pour concevoir des filtres FIR. L'utilisateur impose certaines contraintes au filtre. Normalement celles-ci consistent en le niveau d'atténuation des sinusoides à différentes fréquences (ce qui est appelé la **réponse fréquentielle**). Le software trouve la réponse impulsionnelle qui satisfait au mieux les contraintes.

1.2.9 Filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR)

Considérons à nouveau la convolution

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m).$$

Nous avons vu que lorsque la réponse impulsionnelle est FIR, nous pouvons calculer facilement la sortie du filtre. Lorsque la réponse impulsionnelle n'est pas finie, i.e. il n'existe pas de nombre fini de coefficients différents de zéro, nous disons que le filtre est un filtre à réponse impulsionnelle infinie (IIR). On pourrait penser que pour les filtres IIR, il n'est pas possible de calculer la somme puisque cela implique une addition d'un nombre infini de termes. En fait, il est vrai qu'en général pour un IIR arbitraire, il n'est pas possible de calculer la somme. Néanmoins, nous voyons qu'il y a certaines réponses très spéciales pour lesquelles nous pouvons le faire. Nous montrons cela avec un exemple.

Considérons l'équation

$$y(n) = \rho y(n-1) + (1-\rho)x(n).$$

Nous remarquons que la sortie $y(n)$ est calculée en combinant deux termes : le premier est relié à la sortie elle-même à l'étape *précédente*, i.e. $y(n-1)$, le second à l'entrée actuelle, $x(n)$. Les facteurs ρ et $1-\rho$ nous permettent de régler la proportion des deux contributions. Nous choisissons $0 < \rho < 1$. Par exemple, nous pouvons prendre $\rho = 0.5$. Voyons comment cela fonctionne lorsque vous l'appliquez à la moyenne de vos notes. Après le premier examen, vous obtenez la première note $x(0)$ (nous numérotions les examens à partir de zéro). Puisque nous venons de commencer, $y(-1)$ n'est pas défini. Nous imposons $y(-1) = x(0)$. En appliquant l'équation, nous obtenons

$$y(0) = 0.5x(0) + (1-0.5)x(0) = x(0),$$

ce qui est correct : la première moyenne est la première note. Après le second examen, vous avez $x(1)$. Lorsque nous ré-appliquons la règle, nous obtenons

$$y(1) = 0.5y(0) + 0.5x(1) = 0.5x(0) + 0.5x(1),$$

Ce qui est la moyenne des deux premières notes. A la troisième note, nous avons

$$y(2) = 0.5y(1) + 0.5x(2) = 0.25x(0) + 0.25x(1) + 0.5x(2).$$

C'est à dire la première moyenne inhabituelle : les deux premières notes sont multipliées par le facteur 0.25 alors que la dernière par le facteur 0.5. Si nous continuons les itérations, nous obtenons

$$\begin{aligned} y(3) &= 0.125x(0) + 0.125x(1) + 0.25x(2) + 0.5x(3) \\ y(4) &= 0.0625x(0) + 0.0625x(1) + 0.125x(2) + 0.25x(3) + 0.5x(4) \\ y(5) &= 0.03125x(0) + 0.03125x(1) + 0.0625x(2) + 0.125x(3) + 0.25x(4) + 0.5x(5) \cdot \\ &\dots \end{aligned}$$

Voyez comment les plus vieilles notes sont multipliées par des facteurs de plus en plus petit mais jamais nuls. Les plus récentes notes sont multipliées par des facteurs croissants. Pour comparaison, la moyenne mobile ne prenait pas en compte les plus vieilles notes et multipliait par le même facteur $1/L$ les plus récentes notes. En d'autres termes, nous calculons une moyenne où nous prenons en compte toutes les notes, mais avec des poids différents. Par conséquent, nous pouvons considérer cela comme une alternative à la moyenne mobile.

Nous montrons que ce que nous obtenons est un filtre IIR. En fait, si $x(n) = \delta(n)$ vous obtenez la réponse impulsionnelle $1, 0.5, 0.25, 0.125 \dots$. Si nous considérons le paramètre générique ρ , nous avons

$$h(n) = \begin{cases} \rho^n & \text{if } n \geq 0 \\ 0 & \text{if } n < 0 \end{cases}$$

Ce qui est en fait un IIR. Notons que nous devons choisir $|\rho| < 1$ afin d'avoir une réponse impulsionnelle stable, c'est à dire *un filtre IIR peut être instable*.

Ceci est seulement un exemple d'un filtre IIR. Vous pouvez en trouver beaucoup d'autres. Le principe commun est d'exprimer la sortie comme une fonction de l'entrée et de la sortie à des temps précédents.

1.2.10 Exercices

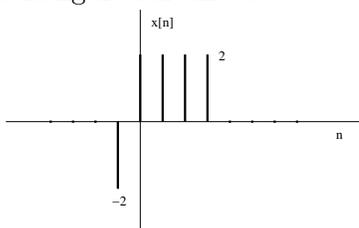
1. Répondez aux questions suivantes :

- (a) Est-ce qu'un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR) peut être instable ?
- (b) Un système fait une prévision, par exemple la température dans une ville donnée par les prévisions météo. Est-ce qu'un tel système est causal ?
- (c) Dans ce chapitre nous avons vu que, quand on envoie une sinusoïde à l'entrée d'un filtre, à la sortie on retrouve aussi une sinusoïde de la même fréquence. Cette propriété est une conséquence du fait que l'exponentielle complexe est solution de

$$x(n - m) = A(m)x(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

par $A(m) \in \mathbb{C}$ approprié. Pouvez-vous trouver d'autres fonctions qui satisfont cette relation ?

2. Le signal $x(n]$ est représenté dans la figure suivante :



Dessinez avec précision les signaux suivants :

- (a) $x(n - 2)$
- (b) $x(3 - n)$
- (c) $x(n - 1)\delta(n)$
- (d) $x(1 - n)\delta(n - 2)$

3. Considérez le filtre qui a réponse impulsionnelle h donnée par

$$h(n) = \delta(n) + 2\delta(n - 1).$$

- (a) Dessinez la réponse impulsionnelle.
- (b) Calculez et dessinez le signal de sortie quand le signal d'entrée est

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}.$$

(c) Calculez et dessinez le signal de sortie quand le signal d'entrée est

$$r(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}.$$

(d) Calculez le signal de sortie quand le signal d'entrée est

$$x(n) = \cos(\pi n/2 + \pi/6) + \sin(\pi n + \pi/3).$$

4. Calculez la sortie d'un filtre qui a réponse impulsionnelle :

$$\begin{aligned} h(0) &= 2, & h(1) &= 1, & h(2) &= -1, \\ h(n) &= 0 & n < 0 & \text{ ou } & n > 2 \end{aligned}$$

quand le signal d'entrée est

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, & x(1) &= 2, & x(2) &= 3, \\ x(n) &= 0 & n < 0 & \text{ ou } & n > 2. \end{aligned}$$

5. Considérez un filtre qui a réponse impulsionnelle

$$\begin{aligned} h(0) &= 1, & h(1) &= -1, \\ h(n) &= 0 & n < 0 & \text{ ou } & n > 1. \end{aligned}$$

Utilisez l'interprétation graphique de la convolution pour calculer le signal de sortie $y(n)$ du filtre quand le signal d'entrée $x(n)$ est

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 1 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}.$$

6. Considérez un filtre qui a réponse impulsionnelle

$$h(n) = \begin{cases} 0.8^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0. \end{cases}.$$

Dessinez $h(n)$. Est-ce que le filtre est causal? Est-il stable et invariant dans le temps? Est-il un FIR?

7. Deux filtres H_1 , H_2 ont les réponses impulsionnelles suivantes :

$$h_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & 0 < n < 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad h_2(n) = \begin{cases} n & 0 < n < 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

Calculez la réponse impulsionnelle du système obtenu en reliant en cascade H_1 et H_2 . Est-ce que ce système est aussi un filtre? Est-ce que la réponse impulsionnelle est finie (FIR)? Qu'est-ce qui se passe si on échange l'ordre de H_1 et H_2 ?

8. Considérez le filtre qui a une réponse impulsionnelle

$$h(n) = \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} \delta(n-m).$$

Quelle est l'opération réalisée par le filtre? Est-ce que le filtre est invariant dans le temps? Est-il causal? Supposons que le signal à l'entrée du filtre soit $x(n) = \sin(2\pi n/5)$, dessinez quelques échantillons du signal de sortie quand $L = 3$. Pouvez-vous dire ce qui se passe quand L augmente?

9. Supposons que $x(n)$ et $y(n)$ soient l'entrée et la sortie d'un système numérique. Déterminez quelles propriétés parmi linearité, stabilité, invariance temporelle, causalité, sont satisfaites par les systèmes suivants :

- (a) $y(n) = 3x(n) - 4x(n - 1)$
- (b) $y(n) = 2y(n - 1) + x(n + 2)$
- (c) $y(n) = nx(n)$
- (d) $y(n) = \cos(x(n))$

10. Vous faites partie d'un groupe de musiciens amateurs et vous êtes chargé d'enregistrer les essais en utilisant votre ordinateur. Malheureusement, le budget limité ne vous permet pas d'acheter un équipement de haute qualité ce qui fait qu'un bruit régulier est toujours superposé à vos enregistrements. Vous découvrez que ce bruit $\eta(t)$ est en réalité une sinusoïde à 100 Hz qui provient du réseau d'alimentation. Le signal enregistré, $s(t)$ est donc $s(t) = m(t) + \eta(t)$ où $m(t)$ est le signal utile, capté par le microphone. Votre ordinateur échantillonne le signal $s(t)$ à la fréquence $f_s = 8000$ Hz (c'est-à-dire que la période d'échantillonnage est $T_s = 0.125$ s). Vous décidez d'utiliser les techniques apprises pendant le cours pour filtrer le signal $s(t)$. D'abord, vous essayez avec une moyenne mobile de longueur L . Comment est-ce que vous choisissez le paramètre L afin d'éliminer complètement la composante $\eta(t)$? Vous remarquez qu'il y a plusieurs valeurs de L qui permettent d'annuler $\eta(t)$. Quel est l'effet sur la composante $m(t)$ si l'on utilise une valeur de L plus ou moins élevée? Un copain de la troisième année vous conseille d'utiliser un filtre plus simple dont l'expression est

$$y(n) = s(n) + a_1s(n - 1) + a_2s(n - 2).$$

Quelle sont les valeurs des paramètres a_1 et a_2 afin d'annuler complètement la composante $\eta(t)$ à la sortie du filtre?

11. Considérez l'exemple du moyennage des notes d'examen, vu pendant le cours. Supposez que vos notes à la fin de la première année sont :

$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$	$g(5)$
3	4.5	4.2	5.1	5	5.7

Soit $y(n)$ le signal obtenu en effectuant une moyenne mobile de longueur $L = 4$.

- (a) Quelles sont les valeurs de $y(3)$, $y(4)$ et $y(5)$?
- (b) Supposez que l'on décompose les notes $g(n)$ de la manière suivante :

$$g(n) = s(n) + e(n)$$

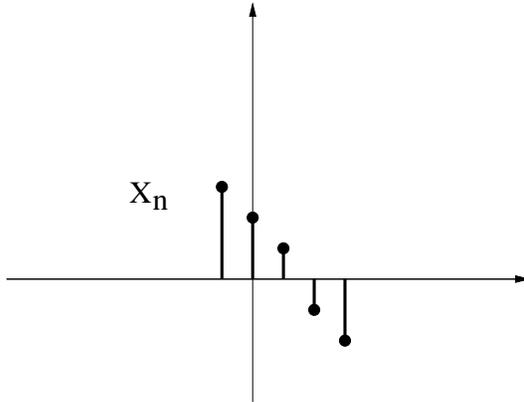
où $s(n)$ est la note que vous mériteriez et $e(n)$ est un terme d'erreur, dû par exemple à des examens injustes. Pouvez-vous trouver un exemple de signal $e(n)$ (autre que $e(n) = 0$) tel $y(n)$ soit égal exactement à la moyenne mobile de $s(n)$? En général, quelle propriété $e(n)$ doit satisfaire?

12. Considérez le système linéaire possédant la réponse impulsionnelle $h(n) = 2\delta(n) - \delta(n - 1) - \delta(n - 2)$.

- (a) Le système est-il causal? Pourquoi?

- (b) Le système est-il stable ? Pourquoi ?
- (c) Quel est le signal à la sortie du système lorsque le signal reçu à l'entrée est $x(n) = \delta(n) + \delta(n - 1) - \delta(n - 2) + \delta(n - 3)$?

13. Le signal $x(n]$ est donné dans le graphique suivant :



Dessinez les signaux suivants

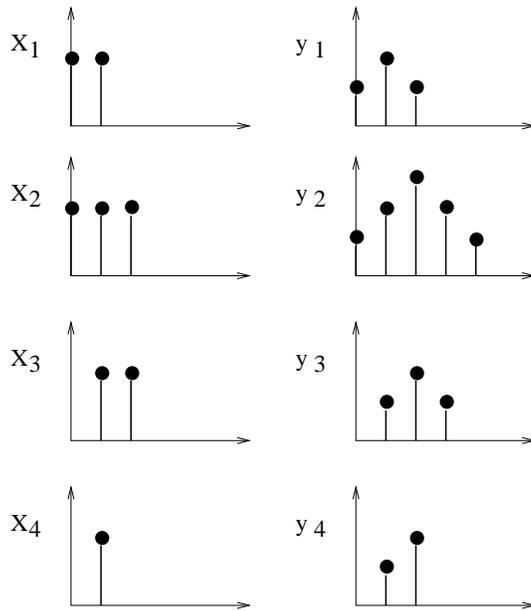
- (a) $x(n - 3)$
- (b) $x(2 - n)$
- (c) $x(n - 1)\delta(n)$
- (d) $x(n + 1)\delta(n - 2)$
14. Considérez un filtre qui a réponse impulsionnelle

$$h(n) = \delta(n) - 2\delta(n - 1) + \delta(n - 2)$$

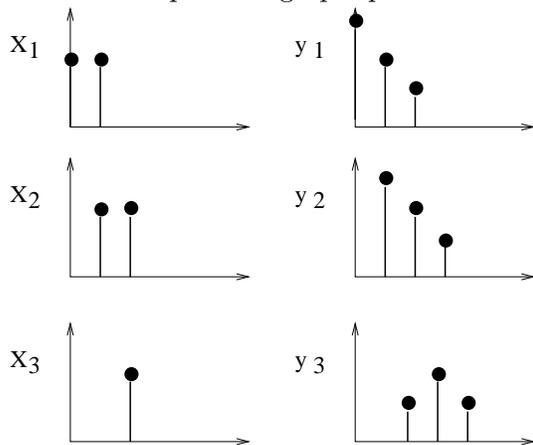
- (a) Est-ce que le filtre est causal
- (b) Est-ce que le filtre est stable
- (c) Calculez la sortie quand le signal d'entrée est

$$x(n) = \delta(n - 1) - 3\delta(n - 2)$$

15. Pour vérifier la linéarité d'un système on utilise quatre signaux de test $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$, et $x_4(n)$. Nous appelons $y_1(n), y_2(n), y_3(n)$, et $y_4(n)$ les signaux de sortie correspondant. Les signaux d'entrée et sortie sont données dans les graphiques suivants :
- (a) Est-ce que vous pouvez dire si le système est linéaire ? Expliquez vos réponses.
- (b) En générale, est-ce qu'un nombre fini de signaux de test est suffisant pour dire si un système est linéaire ou pas ?



16. Considérez un système S et imaginez d'utiliser trois signaux de test pour comprendre quel est son comportement. Nous appelons $x_1(n), x_2(n)$ et $x_3(n)$ les trois signaux de test et $y_1(n), y_2(n)$, et $y_3(n)$ les signaux de sortie correspondants. Les signaux d'entrée et sortie sont donnés pour les graphiques suivants :



Appelons $\bar{h}(n, m)$ la réponse à l'impulsion $\delta(n - m)$.

- Supposez que S soit linéaire et calculez $\bar{h}(n, 0)$. C'est à dire la réponse à $\delta(n)$.
 - Pouvez-vous dire si le système est invariant dans le temps? Expliquez votre réponse.
 - Pouvez-vous dire si le système est stable? Expliquez votre réponse.
17. Nous avons vu dans le cours que la moyenne mobile est une méthode efficace pour réduire l'influence des erreurs d'une séquence telle que des notes d'examens. Appelons $g(n)$ la note obtenue lors du $n^{ième}$ examen et $y(n)$ la moyenne mobile de longueur $L = 4$ correspondante. Toutes les moyennes mobiles considérées dans cet exercice sont de longueur $L = 4$.

- (a) Supposons que les notes d'un étudiant en fin de première année sont

$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$	$g(5)$
3	4.5	4.3	5.2	5	5.5

Quelles sont les valeurs de $y(3)$, $y(4)$, $y(5)$?

- (b) Supposons que les notes $g(n)$ se décomposent de la façon suivante :

$$g(n) = s(n) + e(n)$$

avec $s(n)$ la note méritée et $e(n)$ un terme d'erreur. Prouvez que si

$$e(n) = e_1(n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

ou

$$e(n) = e_2(n) = \cos(\pi n),$$

alors le terme d'erreur $e(n)$ est complètement supprimé par la moyenne mobile. (astuce : vous pouvez éventuellement utiliser que $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$)

- (c) Utilisez les signaux $e_1(n)$ et $e_2(n)$ pour calculer d'autres signaux qui sont complètement supprimés par la moyenne mobile (au moins un). Quelle propriété du système utilisez-vous pour construire un tel signal ?
- (d) Supposons que le signal d'erreur est exactement un de ceux qui peuvent être supprimés par la moyenne mobile. Pouvez-vous reconstruire **de façon exacte** $s(n)$, pour $n \geq 3$, à partir du signal $g(n)$ en utilisant la moyenne mobile ? Justifiez votre réponse.
18. Supposons qu'un système, linéaire invariant dans le temps, a pour réponse impulsionnelle

$$h(n) = \begin{cases} (-1)^n n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

- (a) Dessinez la réponse impulsionnelle $h(n)$. Le système est-il causal ?
- (b) Le système est-il stable ?
- (c) Calculez la sortie du système lorsque l'entrée est $x(n) = \delta(n) + \delta(n - 1)$

1.3 Transformée de Fourier

1.3.1 Introduction

À la section 1.2.7, nous avons vu que les sinusoides possèdent une propriété particulière en relation avec le filtrage. En effet, si l'entrée d'un filtre est une sinusoides, sa sortie (i.e. la convolution avec la réponse impulsionnelle) est une sinusoides de même fréquence dont seules l'amplitude et la phase sont modifiées. Cette propriété est intéressante et nous aimerions l'étudier plus en détails dans ce chapitre. L'idée de base est de décomposer le signal d'entrée en une somme de sinusoides. Puisque le filtre est linéaire, le signal de sortie peut-être obtenu en additionnant la contribution de chaque sinusoides d'entrée. La sortie peut être ainsi calculée sans avoir recours à l'opérateur de convolution. Cette propriété fut remarquée pour la première fois par le mathématicien français Joseph Fourier (1768-1830). Aujourd'hui, nous appelons *transformée de Fourier* la décomposition d'un signal en une somme de sinusoides. Nous avons vu qu'il y a différents types de signaux. Tout d'abord, les signaux peuvent être à temps continu ou à temps discret. Ceci implique deux type de transformées de Fourier. Soit notre signal est décomposé en une somme de sinusoides à temps continu, soit en une somme de sinusoides à temps discret. De plus, les signaux peuvent être classifiés comme périodiques ou apériodiques (à temps discret ou à temps continu). Ceci implique deux nouvelles formes de transformées de Fourier. En conclusion, on peut choisir parmi quatre transformées de Fourier différentes en fonction du domaine temporel du signal, continu ou discret, et de sa périodicité, périodique ou apériodique. Il peut paraître surprenant qu'un signal apériodique puisse être décomposé en une somme de signaux périodiques. Il est cependant utile de se rappeler qu'un signal apériodique est obtenu s'il on somme deux sinusoides dont le rapport des fréquences respectives est un nombre irrationnel. Par conséquent, même un signal apériodique peut être décomposé en une somme de sinusoides s'il on considère un nombre infini de termes. Ceci constitue un outil puissant utile à l'analyse de systèmes linéaires. Dans ce chapitre, nous aimerions analyser la transformée de Fourier la plus simple. A ces fins, nous limitons notre analyse aux *signaux périodiques à temps discret* pour lesquels la transformée de Fourier se décline sous le nom de *transformée de Fourier discrète* (DFT).

1.3.2 Un exemple simple

Nous débutons notre analyse avec un exemple simple. Considérons un signal périodique $x(n)$ de période $N = 4$, comme représenté sur la figure 1.21(a). Le signal prend les valeurs suivantes

$$x(0) = 4, \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 2, \quad x(3) = 1.$$

Peut-on l'exprimer comme une somme de sinusoides? Puisque la période est de 4, nous ne considérons que les sinusoides de période 4 ou des diviseurs de 4, c'est-à-dire 4, 2 et 1. Nous cherchons donc une décomposition de la forme

$$x(n) = P_0 + P_1 \sin\left(2\pi\frac{n}{4} + \phi_1\right) + P_2 \sin\left(2\pi\frac{n}{2} + \phi_2\right), \quad (1.7)$$

où les paramètres P_0 , P_1 , P_2 , ϕ_1 et ϕ_2 sont inconnus. Il n'y a que 4 contraintes à satisfaire, imposées par la valeur que doit prendre le signal aux points $n = 0, 1, 2, 3$; nous devrions donc

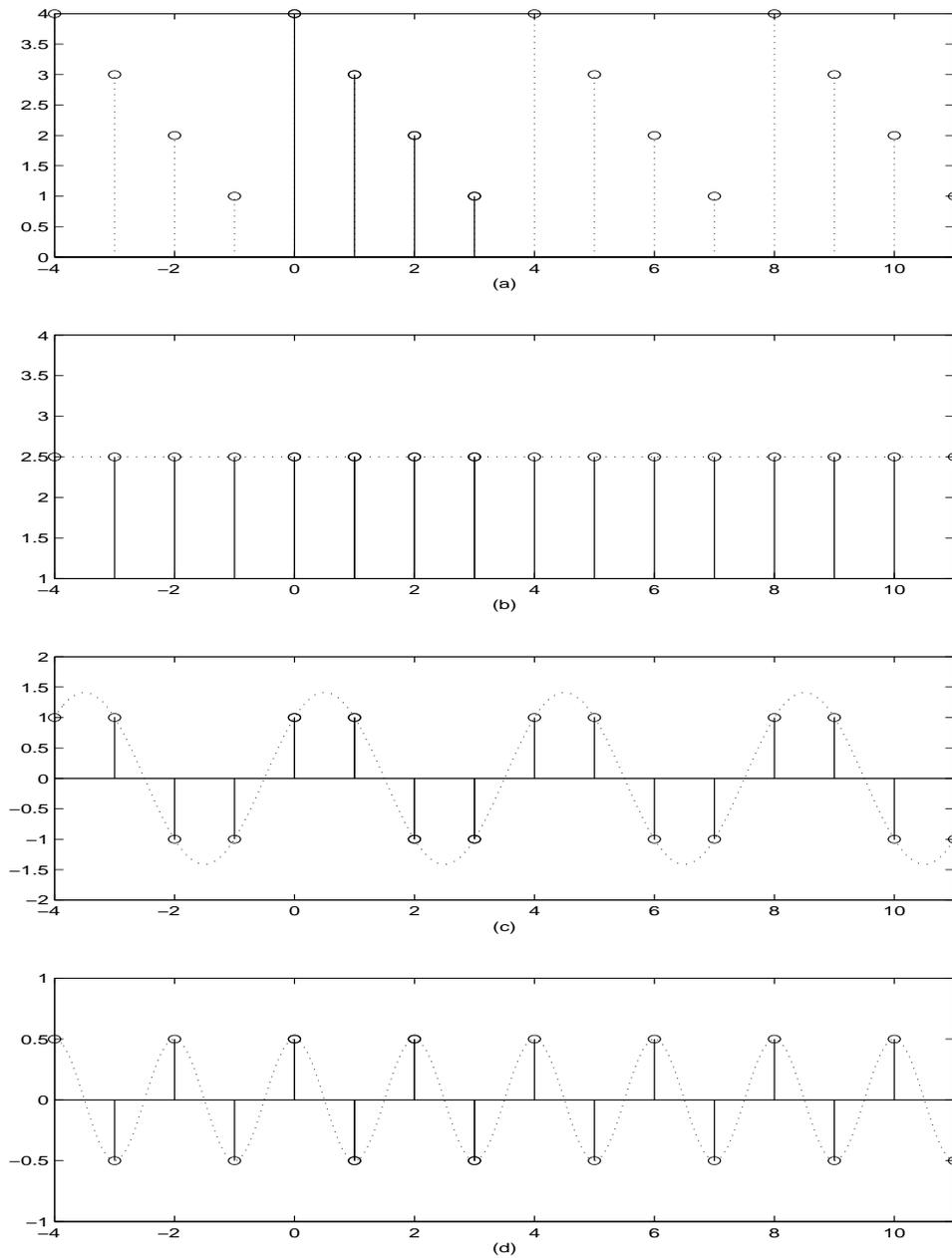


FIG. 1.21 – Exemple de décomposition de Fourier d'un signal périodique à temps discret. Le signal a une période $N = 4$ (a) et est décomposé en une somme de 3 sinusoïdes discrètes. La première composante est une constante, ce qui correspond à une sinusoïde de période 1 (b), la deuxième est une sinusoïde de période 4 (c), et la troisième est une sinusoïde de période 2 (d).

pouvoir résoudre le problème. Pour déterminer les inconnues, nous utilisons la formule trigonométrique du sinus d'une somme, de manière à réécrire l'équation (1.7) sous la forme

$$x(n) = A_0 + A_1 \cos\left(2\pi\frac{n}{4}\right) + B_1 \sin\left(2\pi\frac{n}{4}\right) + A_2 \cos\left(2\pi\frac{n}{2}\right) + B_2 \sin\left(2\pi\frac{n}{2}\right),$$

où

$$A_i = P_i \sin(\phi_i), \quad B_i = P_i \cos(\phi_i), \quad i = 0, 1, 2, \quad (1.8)$$

(afin de préserver l'uniformité de la notation, la constante X_0 est également représentée comme une sinusoïde de période 1).

Ainsi, chaque échantillon est exprimé comme une combinaison linéaire des inconnues A_0, A_1, A_2, B_1, B_2 et une équation peut être posée pour chaque valeur $x(n)$. Nous observons que le facteur $\sin(2\pi\frac{n}{2})$ qui multiplie B_2 vaut zéro pour chaque valeur de l'index temporel n . Nous pouvons donc éliminer ce terme et supposer que $B_2 = 0$ (en réalité, n'importe quelle valeur de B_2 satisfait les contraintes). Nous pouvons donc écrire le système linéaire d'équations de la manière suivante

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 4 \\ A_0 - A_2 + B_1 = 3 \\ A_0 - A_1 + A_2 = 2 \\ A_0 - A_2 - B_1 = 1 \end{cases}.$$

Ce système peut être résolu en utilisant les méthodes usuelles. Par exemple, la variable A_0 peut-être obtenue en sommant les quatres équations,

$$A_0 = \frac{4 + 3 + 2 + 1}{4} = \frac{5}{2}.$$

Les autres inconnues peuvent être calculées de manière similaire. Nous obtenons

$$A_0 = \frac{5}{2}, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = \frac{1}{2}, \quad B_1 = 1.$$

En conclusion, le signal d'entrée peut être décomposé de la manière suivante

$$x(n) = \frac{5}{2} + \cos\left(2\pi\frac{n}{4}\right) + \sin\left(2\pi\frac{n}{4}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi\frac{n}{2}\right).$$

Pour obtenir une représentation de la forme (1.7), nous devons combiner les sinusoïdes et co-sinusoïdes ayant la même fréquence. Dans notre cas, les deuxième et troisième termes sont combinés en calculant les valeurs de P_1 et ϕ_1 qui satisfont les équations (1.8). Nous obtenons

$$P_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \sqrt{2}, \quad \phi_1 = \frac{\pi}{4},$$

et le résultat est

$$x(n) = \frac{5}{2} + \sqrt{2} \sin\left(2\pi\frac{n}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2\pi\frac{n}{2} + \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.9)$$

Les différentes composantes sont représentées à la figure 1.21(b-d).

Il devrait être clair maintenant que, quelque soit le signal périodique à temps discret considéré, nous pouvons répéter les opérations de l'exemple ci-dessus et ainsi obtenir la décomposition de Fourier correspondante. Néanmoins, il serait ardu de résoudre un système linéaire d'équations à chaque fois que nous désirons obtenir une décomposition de Fourier. Heureusement, la solution de ce système peut être exprimée directement, et ceci quelque soit la période N . Nous étudions cette solution dans la section qui suit.

1.3.3 Définition

Dans le but de simplifier la représentation de la décomposition de Fourier, il est pratique de remplacer les sinusoides par des exponentielles complexes. En effet, il est utile de se rappeler que

$$Pe^{j(2\pi ft + \phi)} = P \cos(2\pi ft + \phi) + jP \sin(2\pi ft + \phi),$$

où $j = \sqrt{-1}$ représente le nombre imaginaire. Ainsi, une exponentielle complexe permet de représenter deux sinusoides de fréquences égales et dont les phases diffèrent de $\pi/2$. Les deux composantes correspondent aux parties réelle et imaginaire de l'exponentielle complexe. Dans notre cas, nous considérons des sinusoides à temps discret de fréquences k/N , $k = 0, 1, \dots, N-1$; nous considérons donc des termes du type $e^{j2\pi \frac{k}{N}n}$ et cherchons une décomposition de la forme

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi \frac{k}{N}n}. \quad (1.10)$$

Par exemple, nous pouvons réécrire les résultats de la section précédente en utilisant des exponentielles complexes. La relation

$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j},$$

et l'équation (1.9) nous permettent d'écrire

$$x(n) = \frac{5}{2} + \sqrt{2} \frac{e^{j(2\pi \frac{n}{4} + \frac{\pi}{4})} - e^{-j(2\pi \frac{n}{4} + \frac{\pi}{4})}}{2j} + \frac{1}{2} \frac{e^{j(2\pi \frac{n}{2} + \frac{\pi}{2})} - e^{-j(2\pi \frac{n}{2} + \frac{\pi}{2})}}{2j}.$$

Comme nous pouvons le remarquer, l'expression ci-dessus ne contient que des exponentielles complexes mais certaines possèdent des fréquences négatives. Ceci n'est pas un problème puisqu'une multiplication par le terme $e^{j2\pi n} = 1$ nous permet de ramener ces fréquences négatives dans l'intervalle $[0, 1]$. Après quelques calculs, nous obtenons

$$x(n) = \frac{1}{4} \left(X_0 + X_1 e^{j2\pi \frac{n}{4}} + X_2 e^{j2\pi \frac{n}{2}} + X_3 e^{j2\pi \frac{3n}{4}} \right),$$

avec

$$X_0 = 10, \quad X_1 = 2 - 2j, \quad X_2 = 2, \quad X_3 = 2 + 2j.$$

La prochaine étape consiste à déterminer les coefficients X_i directement à partir des échantillons $x(n)$, $n = 0, \dots, 3$. La formule qui nous permet de le faire est

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.11)$$

ce qui correspond à la transformée de Fourier discrète (DFT) du signal périodique $x(n)$. L'équation (1.10) correspond à la transformée de Fourier discrète inverse (IDFT) et permet la reconstruction de $x(n)$ à partir des coefficients X_k . Vérifions que la DFT calculée à l'aide des équations (1.11) permet d'obtenir les bons coefficients pour l'équation (1.10). Nous substituons (1.11) dans (1.10) et reconstruisons $x(n)$ comme

$$x(n) \stackrel{?}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j2\pi \frac{k}{N} m} e^{j2\pi \frac{k}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k}{N} (n-m)}.$$

Le terme

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k}{N} (n-m)}$$

est égal à N lorsque $n = m$ et zero lorsque $n \neq m$. Nous obtenons donc bien $x(n)$ ce qui nous permet de conclure que l'expression (1.11) donne les bons coefficients de DFT.

Exemple 1. *Utilisons l'expression (1.11) pour obtenir directement les coefficients de DFT. Nous avons*

$$\begin{aligned} X_0 &= 4 + 3 + 2 + 1 = 10, \\ X_1 &= 4 + 3e^{-j\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j\pi} + e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 2 - 2j, \\ X_2 &= 4 + 3e^{-j\pi} + 2 + e^{-j3\pi} = 2, \\ X_3 &= 4 + 3e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 2e^{-j3\pi} + e^{j\frac{9\pi}{2}} = 2 + 2j. \end{aligned}$$

Nous remarquons que les coefficients obtenus correspondent exactement à ceux calculés auparavant (et qui nécessitaient un calcul bien plus long).

1.3.4 Propriétés

La transformée de Fourier discrète satisfait quelques propriétés très utiles lorsqu'il s'agit de faire des calculs. Nous en donnons ici les principales.

Symétrie Hermitienne

Même si l'utilisation d'exponentielles complexes simplifie grandement les calculs, le signal $x(n)$ est normalement réel. Dans ce cas, les coefficients de DFT ont une certaine structure, que l'on appelle **symétrie Hermitienne**, et qui est représentée par l'équation

$$X_k = X_{N-k}^*, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

où l'exposant $*$ désigne le conjugué d'un nombre complexe (i.e. la partie réelle reste inchangée et la partie imaginaire change de signe).

Exemple 2. Cette propriété simplifie le calcul de la DFT des séquences réelles. En effet, considérons à nouveau l'exemple de la section 1.3.2 et prenons en compte la symétrie Hermitienne. Nous avons

$$X_0 = X_N^* = X_0^*, \quad X_1 = X_3^*, \quad X_2 = X_2^*.$$

Ainsi, seulement X_0 , X_1 , et X_2 ont besoin d'être calculés à l'aide de l'expression (1.11). Le coefficient X_3 peut être facilement déduit de X_1 . De plus, X_0 et X_2 sont des quantités réelles.

Linéarité

La DFT est une opération linéaire. En effet, considérons deux signaux $x(n)$ et $y(n)$ de période N et construisons un nouveau signal périodique $z(n) = ax(n) + by(n)$ où a et b sont des nombres arbitraires. La linéarité de la DFT signifie que les coefficients de DFT de $z(n)$ sont donnés par

$$Z_k = aX_k + bY_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Délai

Supposons que la DFT du signal $x(n)$ est X_k . La DFT du signal $y(n) = x(n - M)$, où M est un nombre entier arbitraire, est

$$Y_k = e^{-j2\pi \frac{k}{N} M} X_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Exemple 3. Considérons par exemple le signal périodique

$$y(0) = 2, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 4, \quad y(3) = 3, \quad \dots$$

de période $N = 4$. Ceci correspond simplement au signal $x(n)$ de la section 1.3.2 avec un délai de $M = 2$ échantillons. La DFT de $y(n)$ peut donc facilement s'exprimer comme

$$Y_0 = X_0 = 10, \quad Y_1 = e^{-j2\pi \frac{2}{4}} X_1 = -2 + 2j, \quad Y_2 = e^{-j2\pi \frac{4}{4}} X_2 = 2, \quad Y_3 = e^{-j2\pi \frac{6}{4}} X_3 = -2 - 2j.$$

1.3.5 Convolution

L'utilisation de la transformée de Fourier est justifiée principalement par le comportement spécifique d'une sinusoïde lorsqu'elle est filtrée à l'aide d'un filtre linéaire et invariant dans le temps. En effet, il est utile de se rappeler qu'en général, un filtre modifie l'aspect du signal d'entrée. Une des rares exceptions est le cas de la sinusoïde dont seules l'amplitude et la phase sont modifiées. Puisque la transformée de Fourier décompose un signal en une somme de sinusoïdes, il n'est pas surprenant que l'opération de filtrage possède une description simplifiée dans le domaine de Fourier. Pour s'en rendre compte, prenons un signal périodique $x(n)$ de période N et supposons qu'il soit filtré par un filtre $h(n)$. Nous avons vu dans le chapitre précédent que la sortie du filtre, $y(n)$, est égale à la convolution entre $x(n)$ et $h(n)$. Pour des

raisons de simplicité, supposons que $h(n)$ est un filtre FIR de longueur plus petite ou égale à N . Dans ce cas, le signal de sortie peut s'écrire

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m).$$

Nous utilisons la transformée de Fourier discrète et exprimons $x(n)$ comme pour l'équation (1.10). Nous obtenons

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi \frac{k}{N}(n-m)}.$$

Si nous intervertissons l'ordre des sommes et utilisons les propriétés de l'exponentielle, nous pouvons écrire

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \sum_{m=0}^{N-1} h(m) e^{-j2\pi \frac{k}{N}m} e^{j2\pi \frac{k}{N}n}. \quad (1.12)$$

La somme interne est une quantité qui ne dépend que de $h(n)$ et de k . Nous pouvons l'exprimer comme

$$H_k = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) e^{-j2\pi \frac{k}{N}m}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Cette quantité n'est rien d'autre que la DFT de la séquence $h(n)$ $n = 0, \dots, N-1$. En d'autres termes, nous traitons $h(n)$ comme étant périodique de période N et calculons sa transformée de Fourier discrète. Si nous remplaçons cette expression dans (1.12), nous obtenons

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k H_k e^{j2\pi \frac{k}{N}n},$$

ce qui correspond simplement à la transformée de Fourier discrète inverse, donnée par l'équation (1.10), de la séquence $X_k H_k$. Cela signifie que la DFT de $y(n)$, notée Y_k , satisfait

$$Y_k = X_k H_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Ce résultat signifie que le produit de convolution dans le domaine temporel correspond à un simple produit dans le domaine de Fourier. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de convolution* et permet de simplifier grandement le calcul du produit de convolution. Notez que dans la version du théorème présentée ci-dessus, le signal d'entrée est périodique et la longueur de la réponse impulsionnelle du filtre n'est pas plus grande que la période du signal d'entrée. Des généralisations de ce théorème existent mais ne sont pas discutées dans ces notes.

Exemple 4. *Considérons à nouveau le signal $x(n)$ de la section 1.3.2 et passons-le dans le filtre de réponse impulsionnelle*

$$h(n) = \begin{cases} 3 & n = 0, \\ -1 & n = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comment appliquer le théorème de convolution dans ce cas ? Nous connaissons déjà la DFT du signal d'entrée, nous devons donc calculer la DFT de la séquence $h(n)$, $n = 0, \dots, 3$. Comme précédemment, nous obtenons

$$H_0 = 0, \quad H_1 = H_2 = H_3 = 4.$$

La DFT du signal de sortie peut donc s'écrire

$$Y_0 = X_0 H_0 = 0, \quad Y_1 = X_1 H_1 = 8 - 8j, \quad Y_2 = X_2 H_2 = 8 \quad Y_3 = X_3 H_3 = 8 + 8j.$$

Pour calculer le signal de sortie dans le domaine temporel, nous appliquons la transformée de Fourier discrète inverse. Nous obtenons

$$y(0) = 6, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = -2, \quad y(3) = -6, \quad \dots$$

Bien entendu, le signal de sortie est aussi périodique de période 4.

1.3.6 Exercices

1. Considérez le signal $x(n) = \text{rem}(n, 3)$, où $\text{rem}(a, b)$ est le reste de l'opération 'a divisé par b'. Trouvez la période de $x(n)$ et calculez la DFT. Donnez $x(n)$ en somme des sinusoids discretes.
2. Supposez qu'un filtre a la réponse impulsionnelle

$$h(n) = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ -1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et que le signal $x(n) = \text{rem}(n, 3)$ est envoyé à l'entrée du filtre. Calculez le signal à la sortie en utilisant le théorème de convolution. Vérifiez que votre résultat est correct en calculant avec la méthode régulière.

3. Supposez que la DFT du signal $x(n)$ est donnée par $X_k, k = 0, \dots, N - 1$ et que vous construisez $y(n) = \sin(\frac{2\pi}{N} M n) x(n)$, $z(n) = \cos(\frac{2\pi}{N} M n) x(n)$, avec M étant un nombre entier arbitraire. Calculez la DFT de $y(n)$ and $z(n)$ en utilisant la DFT de $x(n)$.
4. Considérez le signal $x(n)$, périodique avec une période de $N = 4$, qui prend les valeurs $x(0) = 3, x(1) = 1, x(2) = -3, x(3) = 1, \dots$. Déterminez une sinusoïde qui donne une bonne approximation de $x(n)$. (indication : déterminez la composante de la sinusoïde avec l' amplitude maximal).

1.4 Échantillonnage et interpolation

1.4.1 Introduction

Dans cette leçon nous allons montrer les motivations pour les systèmes numériques. Dans la première leçon nous avons vu que les signaux physiques sont souvent des signaux à temps continu. Les systèmes numériques ne peuvent effectuer que des opérations de complexité finie sur un intervalle de temps fini. Donc il semblerait que les systèmes numériques ne sont appropriés que pour traiter les signaux à temps discret. Pourquoi les systèmes numériques sont-ils si largement utilisés ? Nous verrons que nous pouvons utiliser les systèmes numériques pour traiter une classe de signaux à temps continu. Le schéma est montré sur la Figure 1.22. Le signal d'entrée $x(t)$ est un signal à temps continu, par exemple, il pourrait être un signal audio. **L'échantillonneur** le transforme en un signal à temps discret $\bar{x}(n)$ qui est traité. Le traitement inclus le filtrage, comme vu dans la leçon précédente, mais aussi la transmission à travers une connexion numérique ou l'enregistrement sur disques ou cassettes. Le résultat est le signal à temps discret $\bar{y}(n)$ qui est convertit au signal à temps continu $y(t)$ par **l'interpolateur**.

Pourquoi voulons-nous traiter un signal à temps continu en utilisant un tel schéma ? Comme vous le voyez ce système inclus deux conversions qui potentiellement introduisent des erreurs (nous verrons cela plus tard) et un coût monétaire. En électronique, vous étudierez les systèmes à temps continu (aussi nommés systèmes *analogiques*) qui effectuent des opérations similaires à ce que vous pouvez faire avec un système numérique. Par exemple, vous pouvez concevoir des filtres analogiques similaires aux filtres à temps discret que nous avons vu dans la leçon précédente. Pourquoi préférons-nous les systèmes numériques ? Il y a plusieurs raisons. L'une d'entre elles est qu'il est très difficile d'obtenir de bonnes performances pour certains médias lorsque les signaux analogiques sont utilisés. Un exemple est le disque compact. Les bits sont représentés sur la surface d'un disque à l'aide de cavités. La présence ou absence d'une cavité à une certaine position est associée à un chiffre binaire. En principe, on pourrait utiliser un sillon avec une profondeur proportionnelle à un signal analogique, mais il serait difficile de mesurer une telle profondeur. Il semble plus facile de faire la différence entre les conditions de présence et absence d'une cavité que de mesurer une profondeur. Un autre avantage des systèmes numériques est leur robustesse en termes de fiabilité et stabilité. Dans la leçon précédente, nous avons vu comment nous pouvons réaliser un filtre numérique. Selon les paramètres du filtre on peut observer un certain comportement. De tels paramètres correspondent à des valeurs numériques dans les programmes d'ordinateurs, donc ils ne changent pas dans le temps. D'un autre côté, un système analogique est le résultat d'une connexion de certains composants électroniques. Les paramètres des composants correspondent aux paramètres du filtre numérique, mais dans ce cas ils peuvent changer au cours du temps et avec la température. Comme résultat, un filtre analogique est plus sensible à la température et vieillit dans le temps (alors qu'un système numérique se casse de façon abrupte). Les systèmes numériques sont aussi très flexibles. Puisque le traitement est réalisé à l'aide de programmes, il est très facile de les modifier lorsqu'il y a un besoin nouveau. De plus, vous pouvez avoir des programmes différents pour différentes applications. C'est exactement ce que vous faites avec un ordinateur personnel. Ces considérations ont motivé le remplacement des systèmes analogiques par leurs contreparties numériques dans les dernières décennies. De

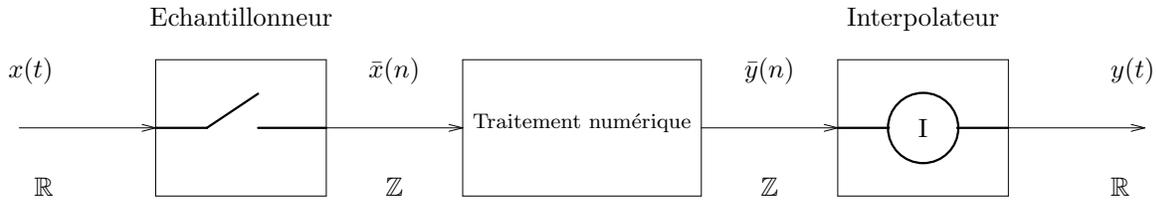


FIG. 1.22 – Exemple d’un système numérique qui traite un signal à temps continu. Le signal d’entrée est transformé en un signal à temps discret et ensuite traité (le domaine des signaux est indiqué en dessous des flèches qui lient les blocs). Le traitement inclut les filtres et aussi les dispositifs de transmission tels que internet ou bien un l’enregistrement sur disque et cassette. L’interpolateur transforme le résultat en un signal à temps continu.

nos jours, les systèmes analogiques sont limités à quelques applications, telles que les interfaces avec des systèmes numériques, systèmes à haute énergie et les dispositifs à bas coûts.

Dans les prochaines sections nous allons examiner chaque bloc de la chaîne de la Figure 1.22. En particulier, nous sommes intéressés dans le problème de l’enregistrement d’un signal audio, c’est à dire, le bloc de traitement est un dispositif qui enregistre et ensuite lit depuis un disque. Nous allons voir que pour ce schéma, sous certaines conditions appropriées, toute la chaîne est “transparente” au signal d’entrée. Cela veut dire que le signal à la sortie de la chaîne n’est pas simplement une bonne approximation du signal d’entrée, mais *exactement égal* au signal d’entrée. Ce résultat n’est pas intuitif, puisque nous avons l’intuition que les signaux à temps discret sont “moins puissants” que les signaux à temps continu. Nous verrons que cela n’est que partiellement vrai.

1.4.2 Echantillonnage

Un échantillonneur est un système qui prend un signal à temps continu et le transforme en un signal à temps discret. Mathématiquement, nous pouvons écrire

$$\bar{x}(n) = x(nT_S) \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

où $x(t)$ est le signal à temps continu et $\bar{x}(n)$ le signal à temps discret. Le paramètre T_S est l’**intervalle d’échantillonnage**. La **fréquence d’échantillonnage**, ou le **taux d’échantillonnage**, est $f_S = 1/T_S$, en unités d’échantillons par seconde (ou parfois Hertz).

Echantillonnage d’une sinusoïde

Soit $x(t)$ le signal sinusoïdal

$$x(t) = \sin(2\pi ft),$$

où f est la fréquence en Hertz. La sortie de l’échantillonneur est le signal à temps discret

$$\bar{x}(n) = \sin(2\pi fnT_S). \tag{1.13}$$

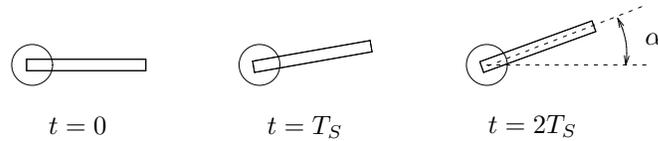


FIG. 1.23 – Expérience de la barre tournante illuminée par un stroboscope. La lumière flash avec une fréquence de $f_S = 1/T_S$. En utilisant les positions illuminées, un observateur essaye de déterminer la fréquence de rotation f de la barre.

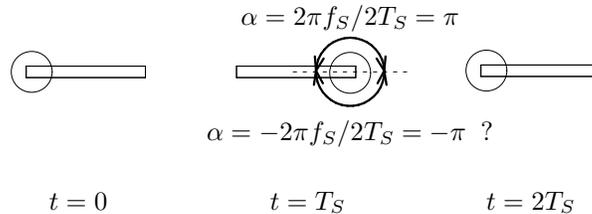


FIG. 1.24 – Ambiguïté de la fréquence f de rotation lorsqu'elle correspond à la moitié de la fréquence d'échantillonnage f_S .

La sinusoïde échantillonnée ressemble à la sinusoïde à temps continu. Cependant, il y a une différence fondamentale. Puisque n est discret, la fréquence f est indifférenciable de la fréquence $f + f_S$ lorsque le signal à temps discret est observé. Ce phénomène est appelé **aliasing**.

Aliasing

Considérons l'expérience suivante. Supposons que nous fixons une barre à un moteur électrique. La barre est fixée sur l'une des deux extrémités de façon à ce que le moteur puisse la faire tourner (voir Figure 1.23). Nous observons la barre dans une pièce noire, en utilisant une lumière stroboscopique. La lumière clignote à des intervalles réguliers f_S de sorte que vous voyez la position de la barre seulement lorsque la lumière l'éclaire. Nous pouvons changer la fréquence de rotation de la barre f . Un observateur essaye de mesurer la fréquence de rotation en utilisant uniquement la position de la barre lorsque la lumière l'éclaire. Est-il possible de déduire la bonne fréquence? Soit la fréquence f qui commence à 0 Hz et balaye les fréquences jusqu'au moins f_S . Fixons comme convention qu'une fréquence positive correspond à une rotation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et une fréquence négative à une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre. Lorsque la fréquence est très basse, le mouvement de la barre entre deux flashes consécutifs est petit et vous pouvez suivre le mouvement de la barre. Maintenant, nous augmentons la vitesse de rotation jusqu'à la fréquence $f_S/2$ (Figure 1.24). La barre est illuminée uniquement lorsque l'angle de rotation α est 0 ou 180 degrés. A ce stade, nous réalisons qu'il y a une ambiguïté : qu'est ce qui changerait si la barre tournait dans le sens des aiguilles d'une montre à la même fréquence, i.e. $f = -f_S/2$? Dans les deux cas la barre apparaît aux deux positions $0^\circ, 180^\circ$, donc on ne note aucune différence entre les cas $f = f_S/2$ et $f = -f_S/2$. Si nous continuons d'augmenter la fréquence de rotation, nous allons probablement percevoir

une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre (fréquence négative) plutôt qu'une rotation dans le sens inverse. Cela arrive parce que nos yeux tendent à interpoler le mouvement de la barre en direction de là où l'angle de rotation entre deux positions consécutives est minimum. Appelons $\alpha = 2\pi fnT_S$ la position angulaire de la barre. Si f est plus grand que $f_S/2$, l'angle de rotation entre deux flashes est $\Delta\alpha = 2\pi fnT_S$ et il y a une ambiguïté avec la rotation opposée $\Delta'\alpha = \Delta\alpha - 2\pi$. En d'autres termes, la fréquence $f > f_S/2$ est perçue comme $f - f_S$. Si nous continuons d'augmenter la fréquence de rotation, nous atteignons $f = f_S$ et la lumière ne flash que lorsque $\alpha = 2\pi f_S T_S = 0$. Donc, nous ne voyons plus la barre tourner. Si nous résumons cette expérience avec une formule, nous pouvons écrire

$$\alpha_P = \alpha + N2\pi,$$

c'est à dire, la position angulaire perçue de la barre α_P a deux types d'ambiguïtés. La première est le nombre inconnu de tours complets durant deux flashes consécutifs. La seconde est la direction de la rotation de la barre. Si nous voyons la barre à la position α_P , nous ne savons pas si c'est en fait $\alpha_P - 2\pi$. En d'autres termes, nous ne connaissons pas le signe correct de α . Ces ambiguïtés à propos de l'angle correspondent aux ambiguïtés sur la fréquence de rotation perçue f_P ,

$$f_P = f + Nf_S.$$

Cette relation est décrite dans la Figure 1.25. Les lignes en pointillés correspondent aux fréquences qui sont indifférenciables des vraies fréquences. La fréquence $f_S/2$ est appelé **fréquence de Nyquist**, d'après Harry Nyquist. Cette fréquence représente un seuil dans la relation entre les signaux à temps continu et à temps discret. La raison intuitive est que si la fréquence d'entrée est en dessous de la fréquence de Nyquist (en dessous de la moitié de la fréquence d'échantillonnage), alors nous prenons plus de deux échantillons par tour. Dans ce cas, les échantillons capturent la rotation de la barre. Deux ou moins d'échantillons ne pourraient faire cela. La rotation de la barre apparaît comme celle d'une autre fréquence.

Cette expérience avec la barre se traduit directement au problème d'échantillonnage d'une sinusoïde. L'angle de la barre correspond à l'argument du sinus, et le signal $x(t) = \sin(2\pi ft)$ est la position verticale de l'extrémité de la barre. Le flash de lumière correspond à l'échantillonnage du signal. Par conséquent, considérons le signal

$$x_P(t) = \sin(2\pi f_P t) = \sin((f + Nf_S)t),$$

où N est un entier et f_S est la fréquence d'échantillonnage. Si $N \neq 0$, alors ce signal est clairement différent de $x(t)$. Cependant, lorsque nous échantillonnons $x_P(t)$ nous obtenons,

$$\begin{aligned} \bar{x}_P(n) &= \sin(2\pi(f + Nf_S)nT_S) = \sin(2\pi fnT_S + 2\pi Nn) \\ &= \sin(2\pi fnT_S) = \bar{x}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Parce que Nn est un entier. Donc, même si $x_P \neq x$, $\bar{x}_P = \bar{x}$, et après avoir été échantillonné, les signaux x et x_P sont indifférenciables. Ce phénomène est appelé **aliasing**, car tout signal à temps discret a plusieurs identités en temps continu. Par exemple, les disques compacts sont créés en échantillonnant les signaux audio à $f_S = 44.1$ KHz, et donc l'intervalle d'échantillonnage est autour de $T_S = 22.7 \mu s$ / échantillon. Une sinusoïde à temps continu de fréquence 47.1 KHz,

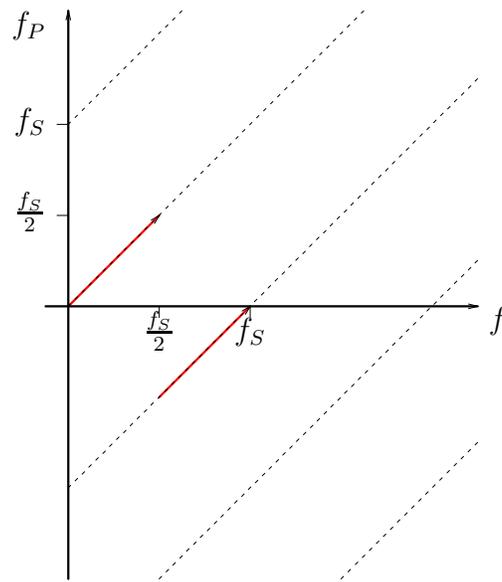


FIG. 1.25 – Ambiguïté de la fréquence de rotation perçue f_P alors que la fréquence réelle f augmente. Les lignes pointillées correspondent aux fréquences indifférenciables de f sur la base des observations. La ligne rouge correspond à la fréquence perçue dans l'expérience de la barre tournante. Nos yeux perçoivent le mouvement de la barre dans la direction qui correspond à l'angle minimum de rotation. Donc, lorsque $f \geq f_S/2$ un observateur perçoit la fréquence $f_P = f - f_S$ au lieu de f .

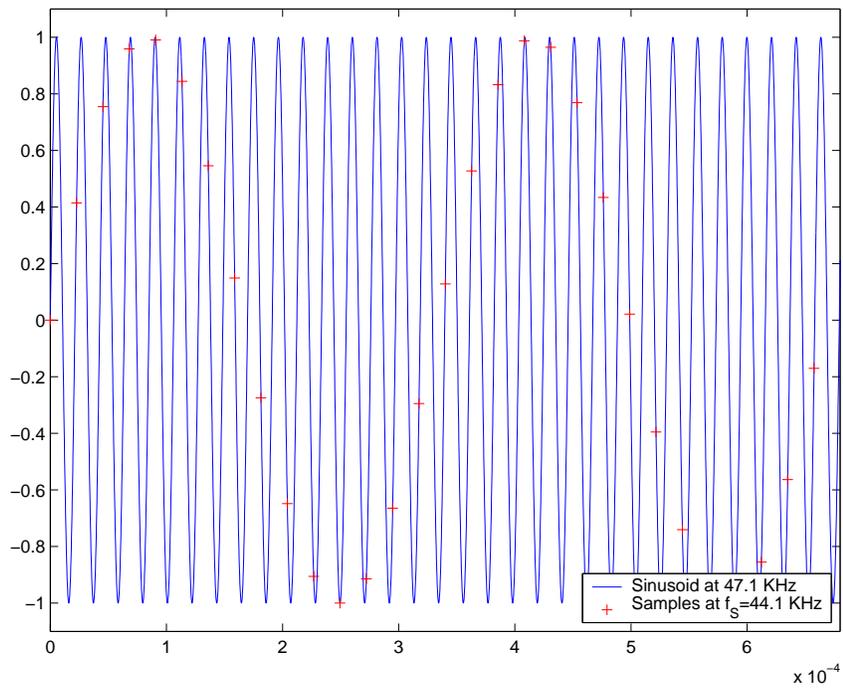


FIG. 1.26 – Une sinusoïde à 47.1 KHz et échantillons pris à 44.1 KHz (fréquence d'échantillonnage utilisée pour l'enregistrement des disques compacts). Les échantillons sont indifférenciables de ceux pris à 3 KHz.

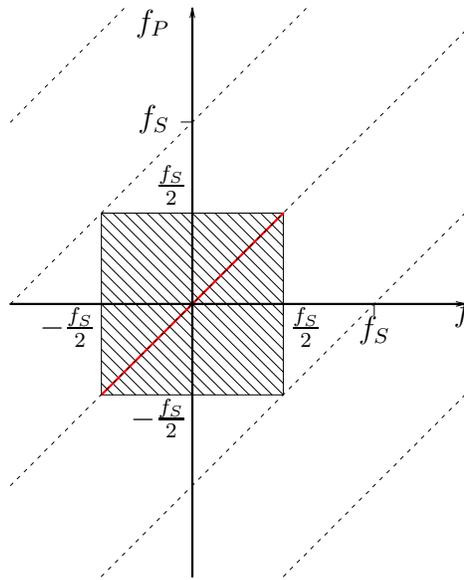


FIG. 1.27 – L’ambiguïté sur la fréquence d’entrée est résolue en limitant sa gamme. Le carré montre la région où il y a une correspondance un à un entre la fréquence d’entrée et la fréquence perçue.

lorsqu’elle est échantillonnée à ce taux, est indifférenciable de la sinusoïde à temps continu de fréquence 3 KHz, lorsqu’elle est échantillonnée au même taux. Le résultat est montré dans la Figure 1.26.

Eviter les ambiguïtés d’aliasing

La Figure 1.25 suggère que même si les échantillons d’une sinusoïde correspondent à une fréquence ambiguë, il est possible de construire une sinusoïde à temps continu uniquement définie à partir des échantillons en choisissant la seule et unique fréquence qui est la plus proche de 0. Ceci résulte toujours en un signal reconstruit qui ne contient que des fréquences en dessous de la fréquence de Nyquist en amplitude. En d’autres termes, on restreint la gamme de la fréquence de la sinusoïde d’entrée à $(-f_S/2, f_S/2)$ afin d’éviter l’ambiguïté (notez que les extrémités de l’intervalle sont exclues). Cette solution est représentée dans la Figure 1.27.

Comment limitons-nous la gamme de la fréquence de la sinusoïde d’entrée ? Dans la leçon précédente, nous avons vu que les filtres sont capables d’atténuer une sinusoïde selon sa fréquence, donc nous pouvons ajouter un filtre au système avant l’échantillonneur. Un tel filtre est appelé filtre d’antialiasing, parce qu’il permet d’éviter l’ambiguïté due à l’aliasing. Lorsqu’une sinusoïde de fréquence en dehors de l’intervalle $(-f_S/2, f_S/2)$ est envoyé à l’entrée du système, elle est simplement ignorée. Cette limitation sur la gamme de la fréquence est le prix à payer pour remplacer la sinusoïde à temps continu par sa version à temps discret. Cependant, vous voyez que, si vous augmentez la fréquence d’échantillonnage, vous étendez la gamme de la fréquence.

Comment construisons-nous un filtre d'antialiasing? Nous notons que ce filtre est à temps continu, puisque nous voulons l'ajouter avant l'échantillonneur. En fait, après l'échantillonneur l'ambiguïté sur la fréquence est déjà présente. Les filtres à temps continu sont très similaires aux filtres à temps discret. Similairement à ce qui a été montré dans la leçon précédente, nous pouvons définir la réponse impulsionnelle et les propriétés d'invariance dans le temps, stabilité et causalité. Le filtre d'antialiasing idéal est spécial. Nous voudrions qu'il soit parfaitement transparent aux sinusoides de fréquences en dessous de la fréquence de Nyquist et arrête parfaitement les sinusoides ayant d'autres fréquences. Il peut être démontré qu'un tel filtre a pour réponse impulsionnelle

$$h(t) = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi t} = f_s \text{sinc}(f_s t),$$

où $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$ est appelée la fonction **sinc**. Il est difficile de montrer que ce filtre correspond au filtre idéal d'antialiasing. Cependant, vous voyez que le filtre n'est pas causal, puisque la réponse impulsionnelle n'est pas zéro pour $t < 0$. En pratique, cette réponse idéale peut seulement être approximée.

Après cette discussion sur les sinusoides, on pourrait penser que le problème d'aliasing doit être complètement reformulé pour un signal générique. Si nous envoyons un signal à temps continu arbitraire à l'échantillonneur, sous quelles conditions les échantillons représentent sans ambiguïté le signal? Il s'avère que ce que nous avons vu pour les sinusoides peut être étendu aux autres signaux. En fait, il peut être démontré que tout signal peut être décomposé en une somme de sinusoides de fréquences différentes. Ceci est appelé la décomposition de **Fourier**. L'échantillonneur est un système linéaire, donc nous pouvons imaginer que nous envoyons une sinusoïde à la fois et nous vérifions si l'aliasing apparaît. Nous appelons **largeur de bande** ou **bandwidth** du signal d'entrée la fréquence maximum de ses composantes sinusoidales. Clairement, si la largeur de bande est plus basse que la fréquence de Nyquist, toutes les sinusoides peuvent être reconstruites sans ambiguïté de même que le signal d'entrée. Inversement, si la largeur de bande est plus grande que la fréquence de Nyquist, au moins une des sinusoides est reconstruite avec une fréquence erronée et le signal reconstruit sera différent du signal d'entrée. Le filtre d'antialiasing considéré pour les sinusoides peut être utilisé pour un signal arbitraire. Encore une fois, nous prenons en compte la linéarité du filtre et nous voyons que les signaux de largeur de bande plus basse que la fréquence de Nyquist ne sont pas affectés par le filtre. Pour les autres signaux, le filtre supprime les composantes en dehors de l'intervalle $(-f_s/2, f_s/2)$.

Considérons à nouveau l'exemple du disque compact. Le filtre d'antialiasing supprimera toutes les composantes de fréquence $|f| \geq f_s/2 = 22.05$ KHz. Cela résout l'ambiguïté entre les sinusoides à 3 KHz et 41.1 KHz, puisque la seconde est rejetée par le filtre. La limite de 22.05 KHz semble raisonnable pour enregistrer de l'audio, en fait le système auditif est aussi un filtre passe-bas et la fréquence limite est autour de 15 KHz.

1.4.3 Interpolation

Supposons que nous concevons l'échantillonneur et le filtre d'antialiasing selon les concepts décrits dans la section précédente. Nous savons que si nous appliquons une sinusoïde à l'entrée ayant une fréquence plus petite que la fréquence de Nyquist, il n'y a pas d'ambiguïté sur la

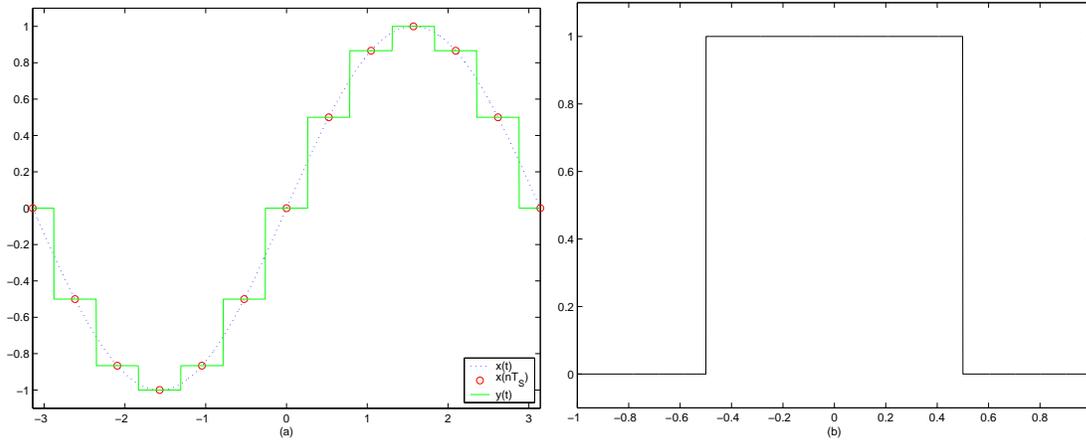


FIG. 1.28 – Interpolation avec une fonction constante par morceaux. (a) Interpolation des échantillons d’une sinusoïde. Notez les discontinuités introduites par ce simple schéma. (b) La fonction rect peut être utilisée pour décrire mathématiquement l’interpolation par une fonction constante par morceaux.

fréquence mais nous ne savons pas comment reconstruire la sinusoïde. De plus, nous voulons traiter des signaux plus complexes qu’une sinusoïde. Ces signaux devraient aussi être reconstruits à partir des échantillons. Comme anticipé, nous appelons **interpolateur** le dispositif qui transforme un signal à temps discret en un signal à temps continu. Considérons à nouveau le diagramme de la Figure 1.22 et le cas d’un enregistrement audio. Excepté pour un délai et en négligeant la quantification, le signal $\bar{y}(n)$ est égal à $\bar{x}(n)$. Nous supposons que ce délai est zéro, pour simplifier la notation, i.e. nous lisons le CD pendant que nous l’enregistrons. Dans ce cas, le problème d’interpolation est la reconstruction du signal $y(t)$ à partir des échantillons $\bar{x}(n)$ afin d’obtenir que $y(t)$ soit aussi proche que possible de $x(t)$. Dû à la définition du signal $\bar{x}(n)$, il est naturel d’imposer

$$y(nT_S) = \bar{x}(n) = x(nT_S)$$

i.e. le signal interpolé doit passer à travers les points disponibles. Il reste à décider d’un schéma d’interpolation pour les autres points. Montrons deux possibilités.

Interpolateur constant par morceaux (zero-order hold)

Cet interpolateur approxime le signal $x(t)$ avec une fonction constante par morceaux. Un exemple est montré dans la Figure 1.28(a). Comme vous le voyez, le signal interpolé est constant sur des morceaux de durée T_S (la période d’échantillonnage) centrée sur les positions d’échantillonnage. Formellement, nous pouvons écrire

$$y(t) = \bar{x}(n) \quad nT_S - \frac{T_S}{2} \leq t < nT_S + \frac{T_S}{2}.$$

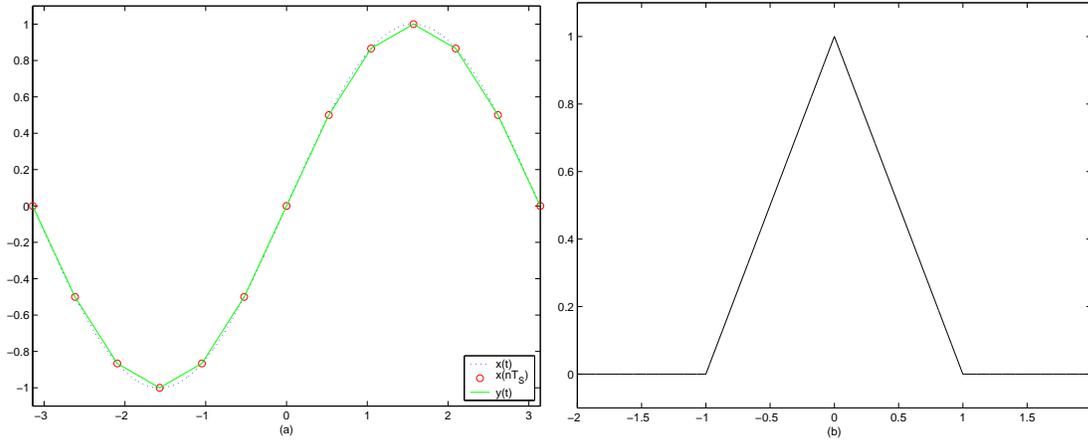


FIG. 1.29 – Interpolation linéaire (aussi appelée first-order hold). (a) Interpolation d'échantillons d'une sinusoïde en utilisant l'interpolation linéaire. (b) La fonction triangulaire est la fonction d'interpolation correspondant à l'interpolation linéaire.

Nous voulons réécrire cette définition de façon à ce qu'elle puisse être étendue à d'autres types d'interpolation. Définissons la fonction

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 \leq t < 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

représentée dans la Figure 1.28(b). L'idée est de décrire les pièces constantes de $y(t)$ à l'aide de fonctions rect . Premièrement notez que $\text{rect}((t - nT_S)/T_S)$ prend la valeur 1, lorsque t appartient à l'intervalle $[nT_S - T_S/2, nT_S + T_S/2)$, ce qui correspond au morceau générique de $y(t)$. Donc, nous pouvons écrire

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{x}(n) \text{rect}\left(\frac{t - nT_S}{T_S}\right).$$

Notons que cette expression peut être généralisée à

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{x}(n) h\left(\frac{t - nT}{T}\right). \quad (1.14)$$

En fait, nous obtenons l'interpolateur constant par morceaux en posant $h(t) = \text{rect}(t)$. Ceci est l'expression générale de l'interpolateur. En changeant la fonction d'interpolation h , nous pouvons changer le type d'interpolation et l'erreur par rapport au signal d'entrée $x(t)$.

Interpolation linéaire

Une interpolation linéaire (parfois appelée une prise de premier ordre) connecte simplement les points correspondants aux échantillons par des lignes droites. Un exemple est montré dans la Figure 1.29(a). Nous voyons immédiatement que cet interpolateur est déjà une bonne amélioration par rapport à l'interpolateur constant par morceaux.

Pouvons nous mettre l'interpolateur linéaire sous la forme de l'équation (1.14)? Définissons la fonction triangulaire

$$\text{triang}(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui est montrée dans la Figure 1.29(b). Il est facile de montrer que la fonction triangulaire correspond à l'interpolation linéaire de l'expression (1.14). En fait, notez que les différentes translations de la fonction triangulaire $\text{triang}((t - nT_S)/T_S)$ recouvrent les parties droites, de sorte que le résultat est, en fait, fait de lignes droites.

Pouvons-nous faire quelque chose de mieux que l'interpolation linéaire? Comme vous l'avez vu, pour l'interpolateur constant par morceaux, l'interpolation à un certain temps t était calculée sur la base d'un échantillon unique. Pour l'interpolation linéaire, le résultat était obtenu en utilisant deux échantillons consécutifs. Vous pouvez imaginer que nous pouvons obtenir un meilleur interpolateur en considérant de plus en plus d'échantillons. Ceci est l'idée principale dans le calcul d'un interpolateur idéal. Avant de trouver l'expression d'un tel interpolateur, nous considérons un problème similaire d'interpolation d'un ensemble fini de points. Nous allons trouver l'interpolateur idéal en prenant la limite à l'infini du nombre de points.

Interpolation de Lagrange d'un ensemble fini de points

Dans cette section, nous considérons un problème légèrement différent de celui de l'interpolation d'un signal à temps discret. Nous verrons l'interpolation d'un ensemble *fini* de points. Considérons les points $(t_1, \bar{x}_1), (t_2, \bar{x}_2), \dots, (t_N, \bar{x}_N)$. Nous recherchons un polynôme $y(t)$ qui passe par tous les points. Ceci est appelé **l'interpolation de Lagrange** des points.

Nous notons que le degré minimum du polynôme est donné par $N - 1$. En fait, deux points définissent une ligne, i.e. un polynôme de degré 1, trois points une parabole qui est un polynôme de degré 2 et ainsi de suite. Donc, $y(t)$ est l'unique polynôme de degré $N - 1$ qui passe par les N points. On pourrait calculer les coefficients du polynôme en écrivant un système d'équations : chaque équation correspond au passage par l'un des points. Cependant, il y a une façon plus simple d'écrire directement la solution. En fait, considérons les polynômes

$$L_i(t) = \frac{(t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_{i-1})(t - t_{i+1}) \cdots (t - t_N)}{(t_i - t_1)(t_i - t_2) \cdots (t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1}) \cdots (t_i - t_N)} \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Nous voyons que chaque polynôme $L_i(t)$ à un degré $N - 1$ et

$$L_i(t_j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}.$$

En fait, le numérateur a des facteurs correspondant à chaque point excepté t_i et le dénominateur se simplifie avec le numérateur lorsque $t = t_i$. A ce stade, il est simple d'écrire l'expression d' $y(t)$ en sommant les polynômes $L_i(t)$ après échelonnage :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{i=N} \bar{x}_i L_i(t).$$

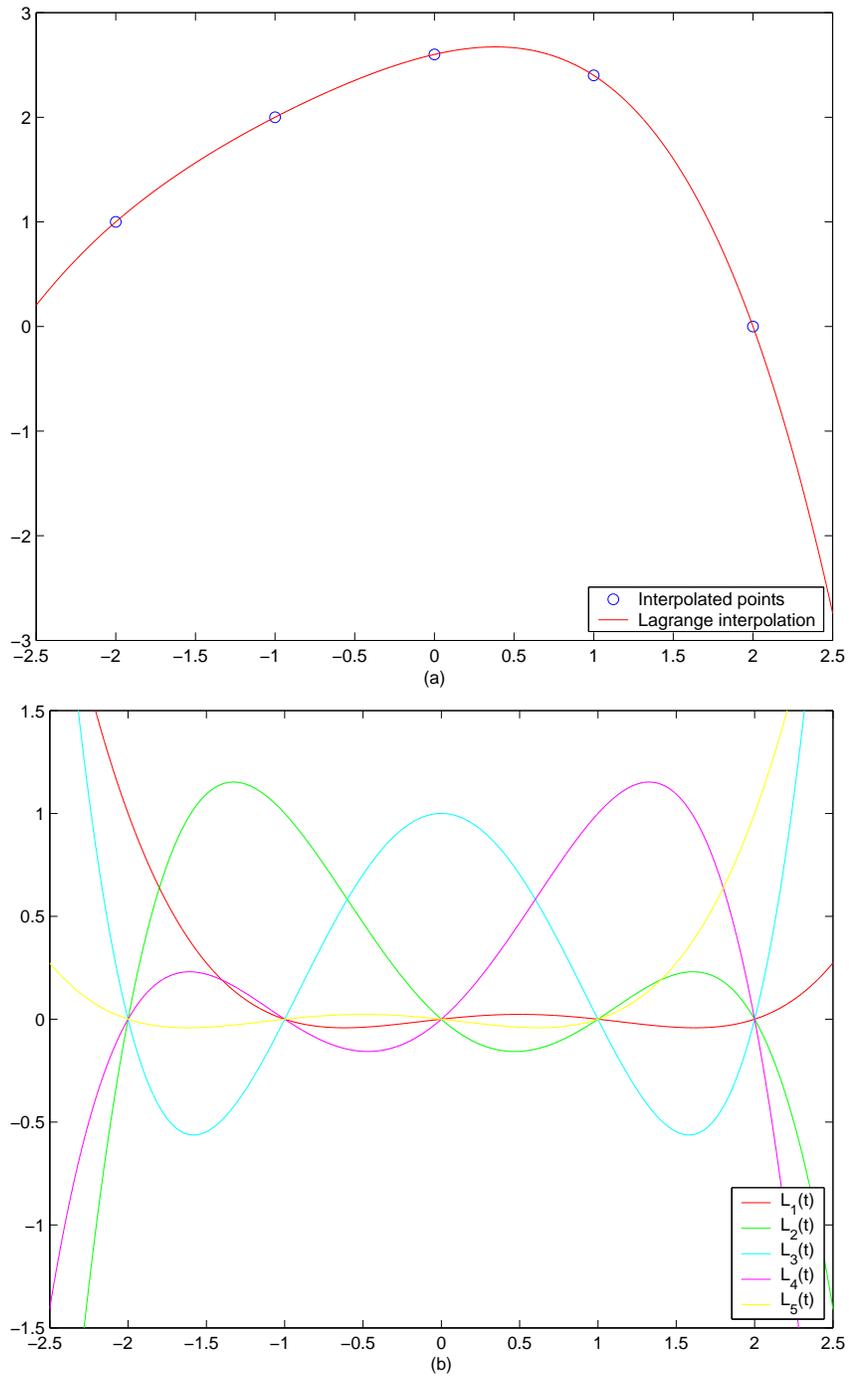


FIG. 1.30 – Interpolation de Lagrange. (a) Interpolation en utilisant 5 points. (b) Les polynômes $L_i(t)$ utilisés pour calculer l'interpolation. Notez que chacun des $L_i(t)$ est nul pour toutes les abscisses des points excepté le point i , où il prend la valeur 1.

En fait, la somme est un polynôme de degré $N - 1$ comme requis, et passe à travers tous les points. Un exemple est montré dans la Figure 1.30(a) pour 5 points. Les polynômes $L_i(t)$ sont montrés dans la Figure 1.30(b).

Interpolateur idéal

Afin de trouver l'interpolateur idéal nous choisissons un nombre fini de points de $\bar{x}(n)$ et nous trouvons l'interpolateur de Lagrange. L'interpolateur idéal est trouvé en prenant la limite pour le nombre de points allant à l'infini. Choisissons l'ensemble de points $I^{(K)}$ où nous calculons l'interpolation comme :

$$I^{(K)} = \{(-KT_S, \bar{x}(-KT_S)), \dots, (-T_S, \bar{x}(-T_S)), (0, \bar{x}(0)), (T_S, \bar{x}(T_S)), \dots, (KT_S, \bar{x}(KT_S))\}.$$

Comme vous le voyez, l'ensemble de point est centré en 0, et K contrôle le nombre de points (égal à $2K + 1$). Comme dans le paragraphe précédent, nous pouvons écrire l'interpolation comme

$$y^{(K)}(t) = \sum_{n=-K}^K \bar{x}(n)L_n^{(K)}(t), \quad (1.15)$$

où le " (K) " est utilisé pour marquer les fonctions qui dépendent du paramètre K . Comme dans le paragraphe précédent, nous pouvons écrire directement les polynômes $L_n^{(K)}$. Par exemple, $L_0^{(K)}(t)$ est donné par

$$L_0^{(K)}(t) = \frac{(t + KT_S)(t + (K - 1)T_S) \dots (t + T_S)(t - T_S) \dots (t - KT_S)}{KT(K - 1)T_S \dots T(-T_S) \dots (-KT_S)}. \quad (1.16)$$

Si nous prenons la limite de l'équation (1.15) pour K allant à l'infini, nous obtenons l'interpolateur idéal

$$y(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} y^{(K)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{x}(n)L_n^{(\infty)}(t),$$

où nous avons défini

$$L_n^{(\infty)}(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} L_n^{(K)}(t).$$

Puisque nous considérons un nombre infini de points, toutes les fonctions $L_n^{(\infty)}(t)$ sont obtenues par translation de la même fonction. Par exemple, nous pouvons écrire

$$L_n^{(\infty)}(t) = L_0^{(\infty)}(t - nT_S).$$

Par conséquent, l'interpolateur idéal prend la forme de l'équation (8). Notez également que l'intervalle d'échantillonnage T_S est simplement l'échelle le long de l'axe du temps, donc

$$L_n^{(\infty)}(t) = g\left(\frac{t - nT_S}{T_S}\right),$$

pour une fonction appropriée $g(t)$.

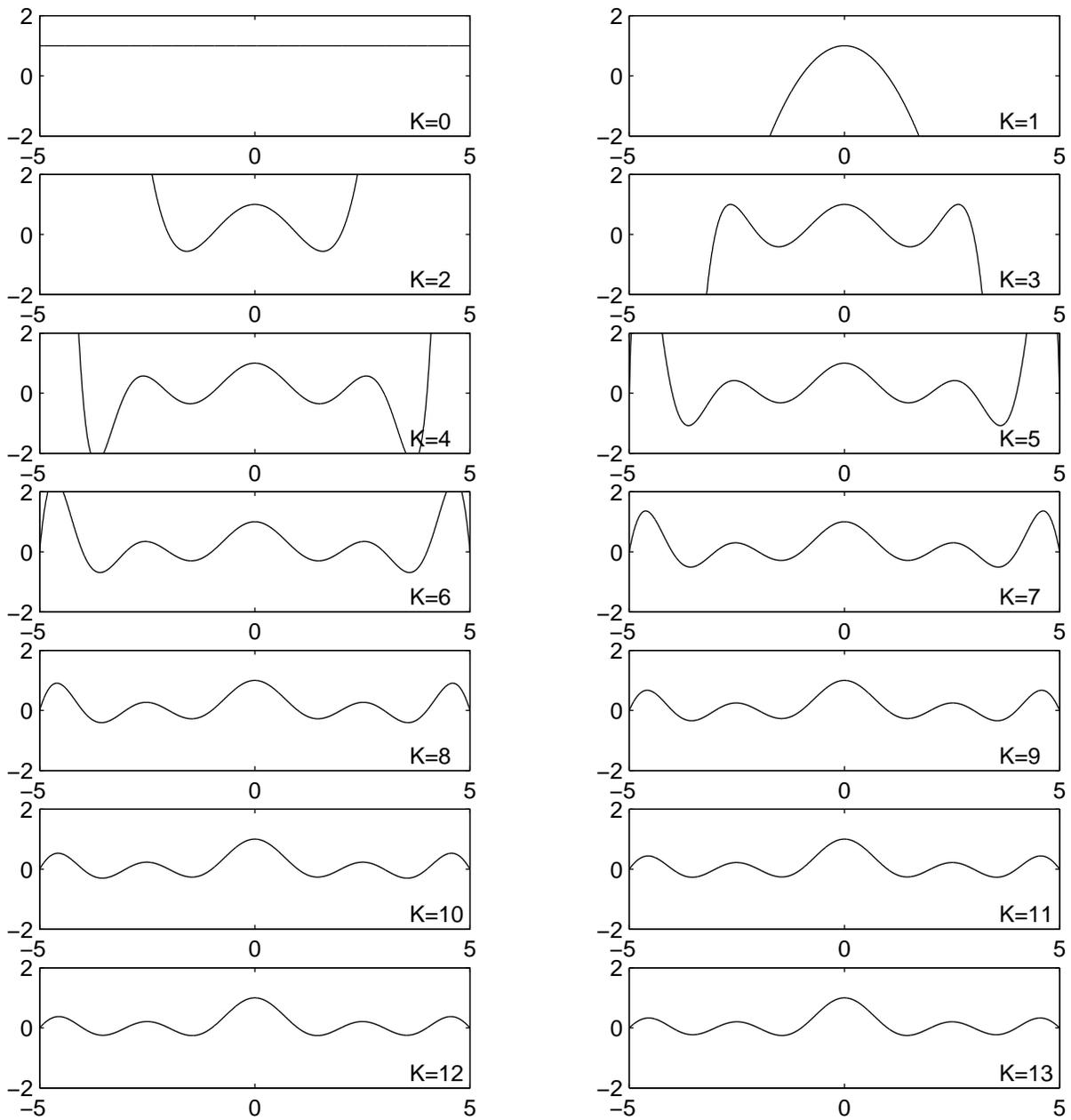


FIG. 1.31 – Le polynôme $L_0^{(K)}(t)$ pour différentes valeurs de K et $T_S = 1$. Lorsque K augmente, le polynôme converge vers la fonction sinc.

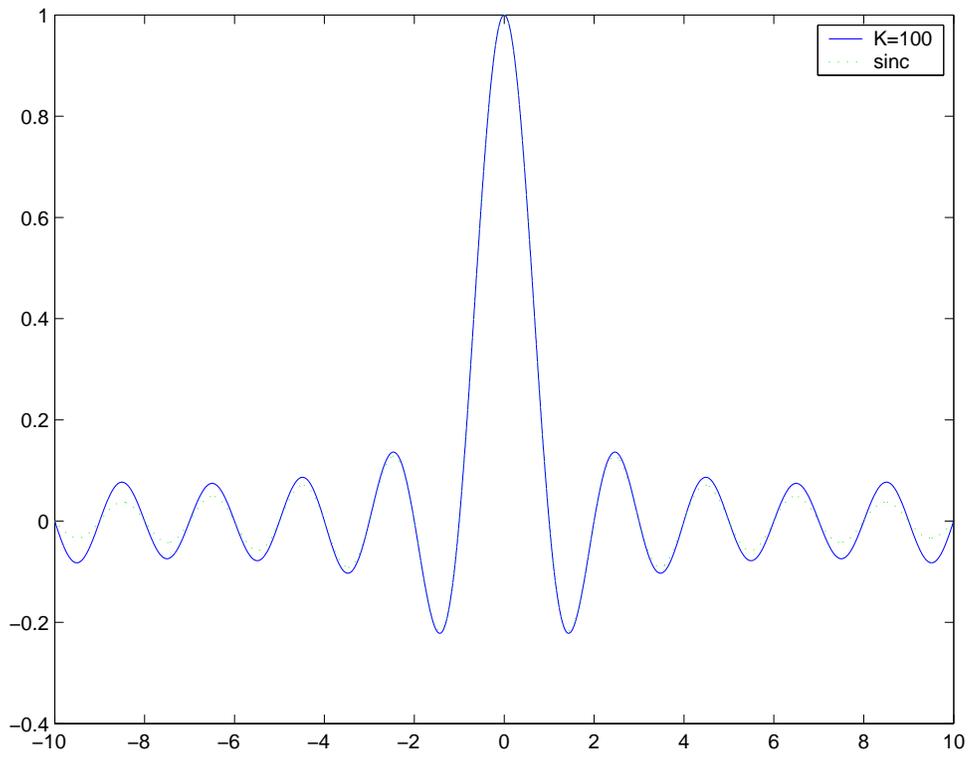


FIG. 1.32 – Le polynôme $L_0^{(K)}(t)$ pour $K = 300$ et $T_S = 1$, superposé à la fonction sinc.

Nous pouvons calculer numériquement la fonction $g(t)$ en considérant $L_0^{(K)}(t)$ pour $T_S = 1$ et des valeurs croissantes de K . Le résultat est montré dans la Figure 1.31. De façon assez surprenante, la fonction limite est $g(t) = \text{sinc}(t)$. Ceci est confirmé par la Figure 1.31 et peut être prouvé formellement par l'équation (10) en prenant en compte quelques formules sur les produits infinis. Il semble très étrange que le filtre d'antialiasing corresponde exactement à l'interpolateur idéal. En fait, ce n'est pas simplement une coïncidence mais pour comprendre cela vous devriez recourir à de l'analyse plus avancée.

Il y a un autre fait qui concerne l'interpolateur idéal. Supposons que nous interpolons les échantillons d'une sinusoïde de fréquence en dessous de la fréquence de Nyquist. Nous savons que les échantillons représentent la sinusoïde sans ambiguïté. Quel est le résultat donné par l'interpolateur idéal ? L'interpolateur idéal est capable de reconstruire la sinusoïde exactement. Cela veut dire que l'interpolateur idéal n'est pas seulement un bon interpolateur mais c'est l'interpolateur optimal. Nous pouvons avoir l'intuition de pourquoi cela se passe si nous pensons à la série de Taylor de $\sin(2\pi f n T_S)$. Nous voyons que nous pouvons écrire les échantillons comme une somme d'échantillons de polynômes. Nous savons que l'interpolateur de Lagrange approxime une fonction avec des polynômes d'un certain degré. Donc, lorsque nous prenons la limite sur le nombre de points, l'interpolateur est capable d'approximer *tout* polynôme. En conclusion, l'interpolateur idéal est capable de reconstruire exactement toute fonction pour laquelle la série de Taylor converge sur tout l'axe, telle la sinusoïde. De plus, l'interpolateur idéal est, comme l'échantillonneur, un système linéaire. Donc, si le signal d'entrée est composé de plusieurs sinusoïdes (comme tout signal ayant un intérêt pratique) il est aussi reconstruit exactement par le système. Cet important résultat donne le **théorème d'échantillonnage** suivant :

Théorème 2. *Soit $x(t)$ un signal à temps continu de largeur de bande B (i.e. il est composé de sinusoïdes de fréquence maximum B) et soit $\bar{x}(n) = x(nT_S)$ les échantillons de $x(t)$. Si la fréquence d'échantillonnage $f_S = 1/T_S$ est telle que*

$$B < \frac{f_S}{2}$$

alors $x(t)$ peut être reconstruit à partir des échantillons $\bar{x}(n)$ en utilisant la formule d'interpolation

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{x}(n) \text{sinc} \left(\frac{t - nT_S}{T_S} \right).$$

Le théorème d'échantillonnage est une réalisation importante du début du siècle dernier. En fait, il montre qu'un système numérique réalisé avec un filtre idéal d'antialiasing et un interpolateur est exactement équivalent à un système à temps continu de largeur de bande égale à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Cette équivalence a motivé le remplacement de beaucoup de systèmes analogiques par des systèmes numériques, avec les avantages que nous avons mentionnés au début de la leçon.

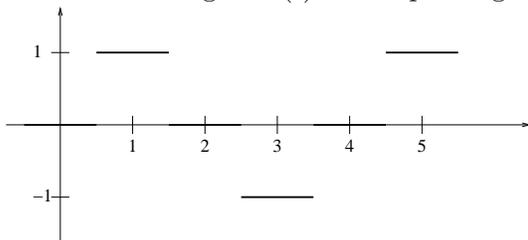
1.4.4 Exercices

1. Le signal $x(t)$ est une sinusoïde à temps continu donnée par $x(t) = \sin(200\pi t)$.
 - (a) Quelles sont les valeurs de la fréquence d'échantillonnage qui permettent la reconstruction du signal ?
 - (b) Peut-on utiliser une fréquence d'échantillonnage de 200 Hz ? Quel serait le signal à temps-discret $\bar{x}(n)$ dans tel cas ?
2. Le signal $\bar{x}(n) = \cos(\pi n/4)$ a été obtenu par échantillonnage du signal à temps-continu $x(t) = \cos(2\pi ft)$ avec une fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz.
 - (a) Trouvez deux valeurs possibles de f qui auraient pu donner le signal $\bar{x}(n)$
 - (b) Quel est le signal $y(t)$ qu'on reconstruirait, si on utilisait l'interpolateur idéal sur le signal $\bar{x}(n)$?
3. Considérez le signal $x(t) = \sin(20\pi t) + \cos(40\pi t)$. Quelles sont les fréquences d'échantillonnages qui permettent l'application du théorème de Shannon-Nyquist ?
4. Considérez les points $P_0 = (0, 1)$, $P_1 = (1, 0.8)$, $P_2 = (2, 2)$, $P_3 = (3, 4)$.
 - (a) Dessinez les points, les résultats de l'interpolation constante par morceaux (zero-order hold) et linéaire.
 - (b) Écrivez le résultat de l'interpolation constante par morceaux comme une somme de fonctions "rect".
 - (c) Écrivez l'interpolation linéaire comme une somme de fonctions "triang"
 - (d) Écrivez l'expression de l'interpolation de Lagrange.
5. Considérez le signal sinusoïdal $x(t) = \sin(2\pi ft)$ de fréquence f inconnue. Supposez que $x(t)$ est échantillonné une fois avec une fréquence d'échantillonnage $f_{S1} = 10$ Hz et une fois avec $f_{S2} = 12$ Hz et que dans les deux cas le même signal à temps discret $\bar{x}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ est obtenu.
 - (a) Quelles sont les valeurs possibles de la fréquence f ? Expliquez.
 - (b) Si $x(t)$ avait été échantillonné seulement une fois, quelle fréquence d'échantillonnage aurait donné la même ambiguïté sur la mesure de f ?
6. Le signal $x(t)$ est une sinusoïde à temps continu donnée par $x(t) = \sin(120\pi t)$.
 - (a) Quelles sont les valeurs de la fréquence d'échantillonnage qui permettent la reconstruction du signal ?
 - (b) Peut-on utiliser une fréquence d'échantillonnage de 120 Hz ? Quel serait le signal à temps-discret $\bar{x}(n)$ dans ce cas ? Quel serait le signal reconstruit par un interpolateur idéal à partir du signal $\bar{x}(n)$?
7. Le signal $\bar{x}(n) = \cos(\pi n/4)$ a été obtenu par échantillonnage du signal à temps continu $x(t) = \cos(2\pi ft)$ avec une fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz.
 - (a) Trouvez deux valeurs possibles de f qui auraient pu donner le signal $\bar{x}(n)$
 - (b) Quel est le signal $y(t)$ qu'on reconstruirait, si on utilisait l'interpolateur idéal sur le signal $\bar{x}(n)$?

8. Considérez le signal $x(t) = \sin(25\pi t) + \cos(50\pi t)$. Quelles sont les fréquences d'échantillonnages qui permettent d'éviter le phénomène de l'aliasing ? Si on échantillonne à la fréquence de 40 Hz, quel est le signal $y(t)$ qu'on reconstruirait, si on utilisait l'interpolateur idéal sur le signal échantillonné ?
9. Considérez les points $P_0 = (0, -1)$, $P_1 = (1, 1.8)$, $P_2 = (2, 3)$, $P_3 = (3, 5)$.
- Dessinez les points, les résultats de l'interpolation constante par morceaux (zero-order hold) et linéaire.
 - Écrivez le résultat de l'interpolation constante par morceaux comme une somme de fonctions "rect".
 - Écrivez l'interpolation linéaire comme une somme de fonctions "triang".
 - Écrivez l'expression de l'interpolation de Lagrange.
10. Considérez le signal $x(t) = \sin(1000\pi t)$
- Quelle sont les valeurs de la fréquence d'échantillonnage qui permettent d'éviter le phénomène d'aliasing ?
 - Qu'est-ce qui se passe si on utilise une fréquence d'échantillonnage de 1000Hz ? Quel est le signal échantillonné $\bar{x}(n)$?
11. Le signal $\bar{x}(n) = \sin(\frac{\pi n}{8} + \frac{\pi}{3})$ a été obtenu par échantillonnage d'une sinusoïde.

$$x(t) = A \sin(s\pi t + \Phi)$$

- Quelles sont les valeurs de A et Φ ?
 - Quelles sont toutes les valeurs possibles de f ?
12. Considérez le signal $x(t) = \sin(10\pi t) + 3\cos(30\pi t) - 2\sin(50\pi t)$
- Quelles sont les fréquences d'échantillonnage qui permettent l'application du théorème de Shannon-Nyquist ?
 - Supposons qu'on utilise une fréquence d'échantillonnage de 40Hz et un filtre idéal avant l'échantillonneur afin d'éviter le phénomène de l'aliasing. Quel serait le signal reconstruit par un interpolateur idéal dans tel cas ?
 - Comme dans le cas précédent, supposons qu'on échantillonne à 40Hz, mais cette fois sans utiliser le préfiltrage. Quel serait dans ce cas le signal reconstruit ?
13. Considérez le signal $x(t)$ donné par le graphique suivant



- (a) À supposé que l'on échantillonne $x(t)$ à la fréquence d'échantillonnage de $F_s=1\text{Hz}$, sans utiliser de filtre antialiasing. Quel serait le signal reconstruit par un interpolateur idéal ?
 - (b) Quel serait le signal reconstruit par un interpolateur constant par morceaux (zero-order hold) ?
 - (c) Lequel des deux interpolateurs donne le meilleur résultat ? Pouvez-vous expliquer pourquoi ?
14. Considérez les points $P_0 = (1, -1.5)$, $P_1 = (2, 1.5)$, $P_2 = (3, 5)$, $P_3 = (4, 9)$.
- (a) Dessinez les points, les résultats de l'interpolation constante par morceaux (zero-order hold) et linéaire.
 - (b) Écrivez le résultat de l'interpolation constante par morceaux comme une somme de fonctions "rect".
 - (c) Écrivez l'interpolation linéaire comme une somme de fonctions "triang"
 - (d) Écrivez l'expression de l'interpolation de Lagrange.

1.5 Solutions des exercices du module traitement du signal

1.5.1 Solutions des exercices de la section 1.1

- Il y a évidemment beaucoup de grandeurs physiques qui peuvent être décrites avec des signaux continus unidimensionnels $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Par exemple, température, pression, vitesse, accélération, tension, courant.

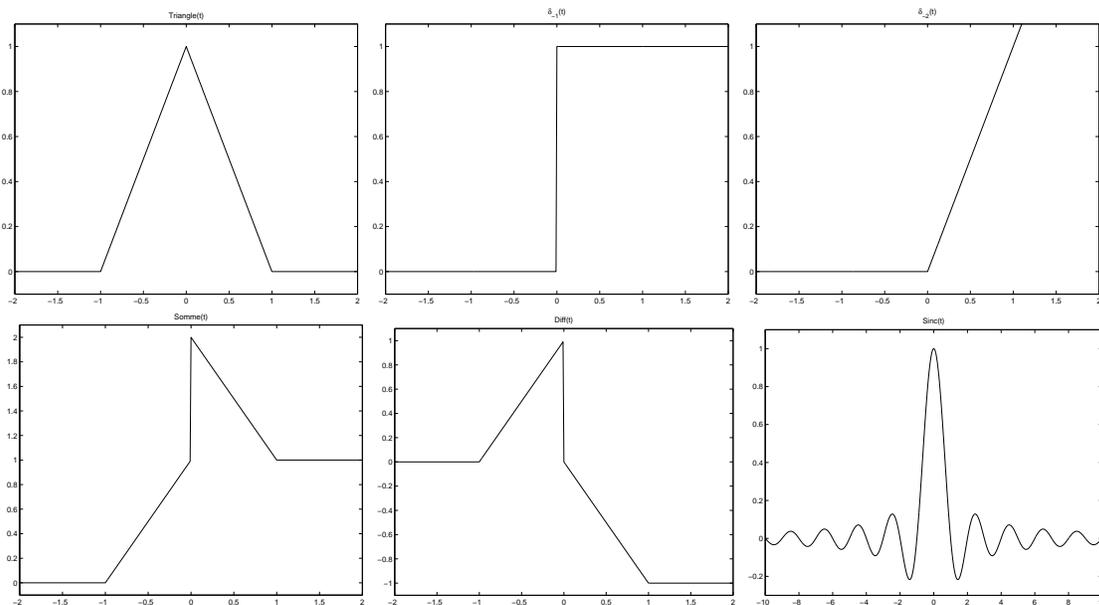
Pour les signaux bidimensionnels ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) on a par exemple la température sur une surface, en fonction de la position (aussi le relief de la terre, en fonction de longitude et latitude).

Pour les signaux tridimensionnels ($\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$) on a les paramètres physiques dans l'espace (à nouveau température, pression, etc.).

Pour les signaux à temps discret on a tous les exemples précédents après échantillonnage.

- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$: une série de mesures de température, pression, etc.
 - $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$: un signal audio stéréo, la position d'un bateau (longitude, latitude) dans le temps.
 - $\{0, 1, \dots, 600\} \times \{0, 1, \dots, 600\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 255\}$: c'est une fonction qui représente une image de 600×600 pixels à 256 niveaux de gris (ou 256 couleurs préétablies).
 - Pratiquement la totalité des images dans l'ordinateur sont représenté sous cette forme (tableau d'entiers).

- Les graphiques sont les suivants :



- Rappelez-vous que $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$, donc

$$x(t) = 5 \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = 5 \sin(10t + \pi) = P \sin(\omega t + \phi).$$

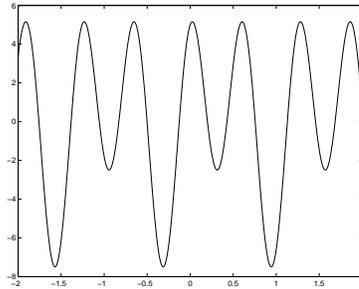
et on a que $P = 5$, $\omega = 10$, $\phi = \pi$. La période est $T_P = 1/f = 2\pi/\omega = 1/5\pi$ s.

5. On utilise la définition d'un signal périodique :

$$P_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + P_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) = P_1 \sin(\omega_1 t + \omega_1 T_P l + \phi_1) + P_2 \sin(\omega_2 t + \omega_2 T_P l + \phi_2),$$

$l \in \mathbb{Z}, T_P \in \mathbb{R}$. L'équation est satisfaite quand $\omega_1 T_P = 2\pi k_1$ et $\omega_2 T_P = 2\pi k_2$ pour $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ appropriées. Donc $\omega_1/\omega_2 = k_1/k_2 \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire que le rapport des fréquences doit être rationnel. On calcule la période T_P en simplifiant le rapport $\omega_1/\omega_2 = k_1/k_2$ afin que k_1 et k_2 soient premiers entre eux. On a que $T_P = 2\pi k_1/\omega_1 = 2\pi k_2/\omega_2$.

6. Comme vu dans l'exercice précédent, $\omega_1/\omega_2 = 2$ et la somme est périodique. La période est $T_P = 2\pi 2/\omega_1 = 2/5\pi$. Le graphique de la fonction est le suivant :



7. On sait qu'il n'y a que 16 couleurs par image, et que chaque couleur est codée avec 24 bit. Donc, au lieu de sauvegarder la couleur de chaque pixel on peut sauvegarder simplement le numéro de la couleur utilisée parmi les 16 possibles. Cette information peut être codée avec 4 bits. Comme les 16 couleurs sont différentes pour chaque image, il est nécessaire d'envoyer aussi la liste de couleurs. En total on a :

- $768 \times 1024 \times 4$ bits pour les numéros,
- 16×24 bits pour la liste de couleurs utilisées,

ce qui donne 393264 bytes. Remarquez que si on avait sauvegardé directement la couleur de chaque pixel, on aurait utilisé $768 \times 1024 \times 24$ bits = 2359296 bytes.

8. Un exemple intéressant est une partition musicale. Les signaux sont les sons produits par les instruments, les notes sont les symboles qui correspondent aux sons. Les notes sont groupées en mesures et les mesures en phrases.

9. (a) Chaque fonction $a \mapsto b(a)$ de A en B associe aux valeurs x, y, z les valeurs 0 ou 1. On peut lister les fonctions dans la table suivante

	$a =$		
	x	y	z
$b =$	0	0	0
	0	0	1
	0	1	0
	0	1	1
	1	0	0
	1	0	1
	1	1	0
	1	1	1

(b) Ce concept peut être appliqué pour lister toutes les fonctions d'un ensemble vers un autre, quand la cardinalité des ensembles (c'est à dire, les nombre d'éléments) est finie. Supposons que m et n soient les nombres d'éléments de A et B . Dans ce cas, la table a m colonnes et on a n possibilités pour le choix de chaque élément. Donc, la table doit avoir n^m lignes qui correspondent à toutes les fonctions de S .

(c) Dans ce cas $m = 288 \times 720$, $n = 2^{24}$. Le nombre d'éléments de S est

$$n^m = (2^{24})^{288 \times 720} = 2^{24 \times 288 \times 720} = 10^{24 \times 288 \times 720 \times \log_{10} 2} \simeq 10^{1498118}.$$

1.5.2 Solutions des exercices de la section 1.2

1. Réponses aux questions :

(a) Non, un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR) ne peut pas être instable. En fait, si $h(n)$ est la réponse impulsionnelle, on a toujours,

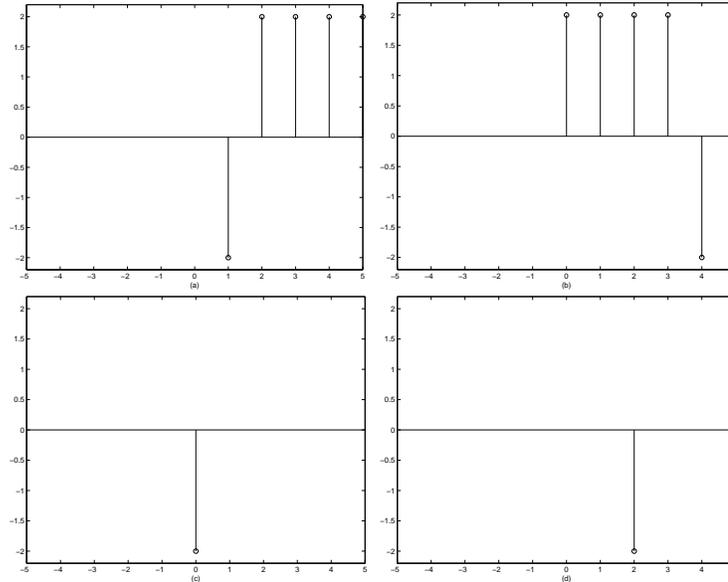
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

(b) Oui, un système qui fait une prévision, par exemple de température est aussi causal. La prévision est simplement une forme de calcul (même si elle peut être basée sur l'expérience d'un être humain) sur les données disponibles au moment de la prévision.

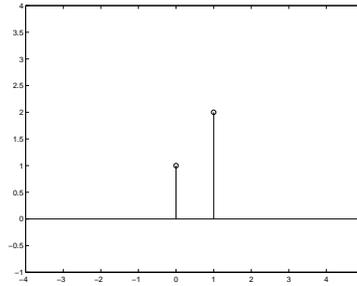
(c) La seule solution est la fonction exponentielle :

$$x(n) = e^{sn} \quad s \in \mathbb{C}.$$

2. Les graphiques sont les suivants :



3. (a) Le graphique de la réponse impulsionnelle est le suivant :

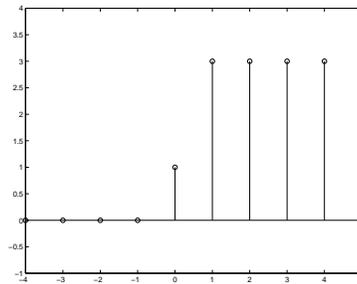


(b) Il faut remarquer que $x * \delta(n) = x$ (en fait, si la réponse impulsionnelle d'un filtre est une impulsion, alors la sortie du filtre est égal à l'entrée). Aussi, $x * \delta(n-1) = x(n-1)$ (le filtre introduit un retard d'un échantillon). Donc, par la linéarité

$$y(n) = (x * h)(n) = x(n) + 2x(n-1)$$

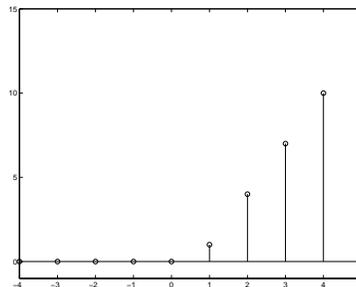
Si $x = u$,

$$y(n) = u(n) + 2u(n-1) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$



(c) Comme dans le cas précédent, on a

$$y(n) = r(n) + 2r(n-1) = \begin{cases} 3n-2 & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n < 1 \end{cases}$$



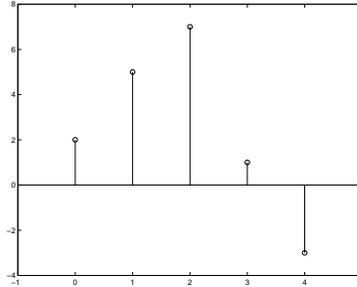
(d) Encore une fois, on a

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) = \cos(\pi n/2 + \pi/6) + \sin(\pi n + \pi/3) + 2 \cos(\pi n/2 - \pi/3) + 2 \sin(\pi n - 2\pi/3).$$

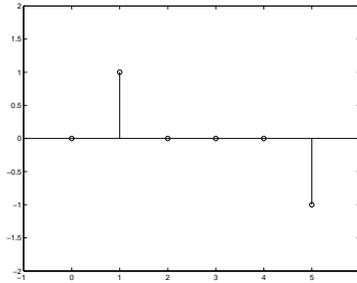
Après quelques simplifications, on trouve

$$y(n) = (1 + \sqrt{3}/2) \cos(\pi n/2) + (\sqrt{3} - 1/2) \sin(\pi n/2) - \sqrt{3}/2 \cos(\pi n)$$

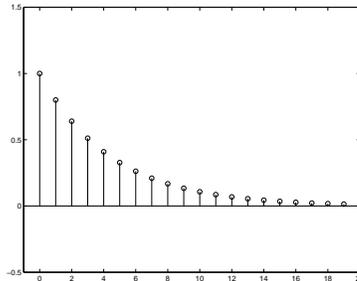
4. Appliquant la formule de la convolution, ou utilisant la méthode graphique vue pendant le cours, on obtient



5. Comme dans l'exercice précédent, on trouve



6. Le graphique de la réponse impulsionnelle est le suivant :



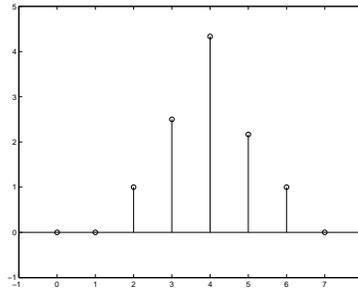
Le filtre est causal, comme $h(n) = 0$ pour $n < 0$. Il est stable car

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \frac{1}{1 - 0.8} < \infty.$$

Il est forcément invariant dans le temps, comme la réponse impulsionnelle dépend uniquement de n . Le filtre n'est pas un FIR parce que la réponse impulsionnelle est différente de zéro pour un nombre infini d'échantillons.

7. On imagine d'envoyer une impulsion à la cascade de H_1 et H_2 . Le premier filtre donne à la sortie le signal h_1 qui entre dans le deuxième système. Le deuxième filtre a réponse impulsionnelle h_2 , donc la sortie de la chaîne est le signal $h = h_2 * h_1$ qui correspond à la

réponse impulsionnelle de la cascade de deux filtres. Le résultat est le suivant :



Le système obtenu est aussi un filtre, en fait :

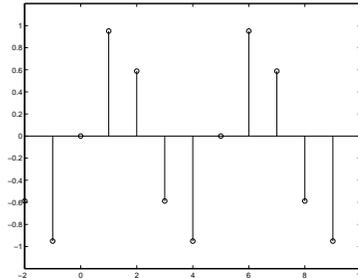
- Il est linéaire (on peut vérifier facilement que la cascade de deux systèmes linéaires est aussi un système linéaire)
- Il est invariant dans le temps (la composition de systèmes invariants dans le temps donne un système invariant dans le temps)
- Le domaine d'entrée du signal d'entrée et de sortie est le même (dans ce cas est \mathbb{Z})

Le filtre obtenu est un FIR (on peut le vérifier sur h , mais un général la cascade de filtres FIR est aussi un filtre FIR). Si on échange H_1 et H_2 on obtient exactement le même résultat car le produit de convolution est commutatif.

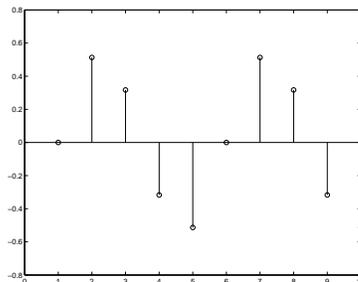
8. On vérifie facilement que la réponse impulsionnelle peut être écrite comme

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{si } 0 \leq n < L \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

donc il s'agit d'une moyenne mobile. Le filtre est invariant dans le temps (la réponse impulsionnelle dépend uniquement de n) et causal (la réponse est zéro quand $n < 0$). Le signal $x(n)$ est périodique et la période est 5 :



et la moyenne mobile sur 3 échantillons donne



On peut prouver (voir les notes) que le signal de sortie est encore une sinusoïde de période

5. Si L augmente, le signal de sortie diminue en amplitude. Si L est un multiple de 5, la sortie est zéro, comme on additionne les échantillons d'un nombre entier de périodes.

9. (a) Le système est linéaire car si y_1 et y_2 sont les sorties en correspondance de x_1 et x_2 , alors

$$y_1(n) = 3x_1(n) - 4x_1(n-1),$$

$$y_2(n) = 3x_2(n) - 4x_2(n-1).$$

Si on multiplie les deux équation par $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ et on additionne on trouve

$$(u_1y_1 + u_2y_2)(n) = 3(u_1x_1 + u_2x_2)(n) - 4(u_1x_1 + u_2x_2)(n-1).$$

Donc $y = u_1y_1 + u_2y_2$ est la sortie quand l'entrée est $x = u_1x_1 + u_2x_2$ ce qui correspond à la linéarité. Le système est stable, en fait si $|x(n)| < N$, alors en utilisant l'inégalité triangulaire

$$|y(n)| = |3x(n) - 4x(n-1)| \leq 3|x(n)| + 4|x(n-1)| < 7N$$

et il suffit de choisir $M = 7N$. On impose $x(n) = \delta(n-m)$, c'est-à-dire l'impulsion centrée en m . On trouve

$$\bar{h}(n, m) = y(n) = 3\delta(n-m) - 4\delta(n-m-1)$$

et le système est invariant dans le temps, parce que on peut écrire $\bar{h}(n, m)$ comme une fonction qui dépend seulement de $n-m$,

$$\bar{h}(n, m) = h(n-m).$$

- (b) Le système est linéaire, pour la démonstration on procède comme dans le cas précédent. Pour contrôler la stabilité on calcule d'abord la réponse impulsionnelle. On remplace $x(n)$ avec l'impulsion en m , $x(n) = \delta(n-m)$:

$$y(n) = 2y(n-1) + \delta(n-m+2).$$

L'impulsion agit seulement par $n = m-2$, avant la sortie est zéro. Par $n = m-2$ la sortie est 1, car $y(n-1) = 0$. Quand $n > m-2$ l'entrée est toujours zéro et on a $y(n) = 2y(n-1)$, donc la sortie double à chaque pas. En conclusion,

$$\bar{h}(n, m) = y(n) = \begin{cases} 2^{n-m+2} & \text{si } n-m \geq -2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

Le système est invariant dans le temps, car $\bar{h}(n, m) = h(n-m)$. La réponse impulsionnelle est

$$h(n) = \begin{cases} 2^{n+2} & \text{si } n \geq -2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

On contrôle la stabilité,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-2}^{\infty} 2^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \infty$$

et le système est instable. Le système est aussi non causal, car $h(-2) = 1 > 0$.

- (c) Comme dans les cas précédents, le système est linéaire. Pour la stabilité on voit que la condition $|x(n)| < N$ n'est pas suffisante à garantir que y est limité, c'est-à-dire que $|y(n)| < M$ pour $M > 0$ approprié. Par exemple, si on prend $x(n) = \delta(n - K)$ l'entrée est borné pour n'importe quelle valeur de K ($|x(n)| \leq 1$). Cependant, la sortie est $y(n) = n\delta(n - K) = K\delta(n - K)$, qui correspond à une impulsion d'implitude K . Comme K est arbitraire, on arrive à la conclusion que la sortie n'est pas limité et que le système est instable. Pour l'invariance temporelle on imagine d'appliquer à l'entrée l'impulsion $\delta(n - m)$,

$$\bar{h}(n, m) = n\delta(n - m).$$

La présence du facteur n fait qu'on ne peut pas écrire $\bar{h}(n, m) = h(n - m)$ et le système n'est pas invariant dans le temps. Pour la causalité il faut vérifier $\bar{h}(n, m) = 0$ par $n < m$. Donc, le système est causal.

- (d) Le système est non linéaire, car le cosinus n'est pas linéaire. Par exemple, les cosinus de la somme de deux angles n'est pas la somme des cosinus des angles. Les propriétés de stabilité, causalité et invariance dans le temps ont été définies uniquement pour les systèmes linéaires, donc elles ne peuvent pas être vérifiées dans ce cas.
10. Il faut d'abord remarquer que la moyenne mobile agit sur $s(t)$ donc elle influence le signal utile $m(t)$ et le bruit $\eta(t)$. Comme la moyenne mobile est un système linéaire, on peut considérer séparément les deux termes. La seule contrainte imposée est que le bruit soit nul après le filtrage, donc il n'est pas nécessaire d'analyser l'effet du filtrage sur $m(t)$. Pour ce qui est du bruit $\eta(t)$, on sait qu'il s'agit d'une sinusoïde dont on connaît la fréquence, mais ni l'amplitude ni la phase : $\eta(t) = P \sin(2\pi ft + \phi)$. Après échantillonnage, le bruit devient $\bar{\eta}(n) = P \sin(2\pi f_d n + \phi)$, où $f_d = fT_s = 1/80$. Dans ce cas, le signal $\bar{\eta}(n)$ est périodique et la période est $N_d = 1/f_d = 80$. La moyenne mobile calcule la moyenne des $\bar{\eta}(n)$ sur l'ensemble $[n - L + 1, n]$ pour toutes les valeurs $n \in \mathbb{Z}$. Donc, pour avoir une moyenne zéro pour toutes les positions n , il faut que L soit un multiple de 80. Toutes les multiples annulent le bruit, mais l'effet sur le signal $m(t)$ est différent. Comme vu au cours, des valeurs de L élevées ont comme effet de réduire les hautes fréquences de $m(t)$ (c'est le même effet qu'on obtient quand on règle au minimum le bouton des aïgus d'une chaîne Hi-Fi). Pour le deuxième filtrage, encore une fois on considère seulement le terme $\eta(t)$ et on obtient :

$$\begin{aligned} y(n) &= \bar{\eta}(n) + a_1 \bar{\eta}(n - 1) + a_2 \bar{\eta}(n - 2) \\ &= P \sin(2\pi f_d n + \phi) + a_1 P \sin(2\pi f_d (n - 1) + \phi) + a_2 P \sin(2\pi f_d (n - 2) + \phi) \\ &= P \sin(2\pi f_d n + \phi) (1 + a_1 \cos(2\pi f_d) + a_2 \cos(4\pi f_d)) \\ &\quad + P \cos(2\pi f_d n + \phi) (-a_1 \sin(2\pi f_d) - a_2 \sin(4\pi f_d)). \end{aligned}$$

La dernière équation a été obtenue en utilisant les formules de la trigonométrie. Pour avoir $y(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ on doit avoir que

$$\begin{cases} \cos(2\pi f_d) a_1 + \cos(4\pi f_d) a_2 &= -1 \\ \sin(2\pi f_d) a_1 + \sin(4\pi f_d) a_2 &= 0, \end{cases}$$

qui représente un système linéaire d'équations. La solution peut être calculée en multipliant les deux équations pour $\sin(2\pi f_d)$ et $\cos(2\pi f_d)$ respectivement et en prenant la différence.

Ce qui permet de calculer $a_2 = 1$. Par substitution de a_2 dans une des équations, on trouve $a_1 = -2 \cos(2\pi f_d)$.

11. (a) Comme vu au cours, la moyenne mobile de longueur $L = 4$ est calculée de la façon suivante :

$$y(3) = \frac{g(0)+g(1)+g(2)+g(3)}{4} = 4.2 \qquad y(4) = \frac{g(1)+g(2)+g(3)+g(4)}{4} = 4.7$$

$$y(5) = \frac{g(2)+g(3)+g(4)+g(5)}{4} = 5$$

- (b) Comme la moyenne mobile est un système linéaire, on peut traiter séparément les signaux $s(n)$ et $e(n)$. On veut que la sortie soit la moyenne mobile de $s(n)$, donc on doit avoir que la moyenne mobile de $e(n)$ soit zéro. La moyenne mobile calcule la moyenne sur 4 valeurs, donc pour annuler la sortie pour chaque valeur de n , on doit choisir $e(n)$ périodique avec période 4 et telle que la moyenne sur une période soit zéro. Par exemple, on peut prendre

$$e(n) = \begin{cases} 4 & n = 0, \pm 4, \pm 8, \dots \\ 1, & n = 1, 1 \pm 4, 1 \pm 8, \dots \\ -3, & n = 2, 2 \pm 4, 2 \pm 8, \dots \\ -2, & n = 3, 3 \pm 4, 3 \pm 8, \dots \end{cases}$$

12. (a) Par la définition d'impulsion $\delta(n)$ on a que

$$h(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \text{ et } n > 2 \\ 2 & n = 0, \\ -1 & n = 1, \\ -1 & n = 2, \end{cases}$$

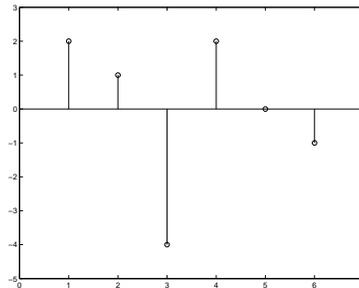
qui correspond à une réponse impulsionnelle causale, comme $h(n) = 0$ quand $n < 0$.

- (b) Le système est stable, comme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = 2 + 1 + 1 < +\infty.$$

On pouvait aussi remarquer que la réponse impulsionnelle est à durée finie (FIR) et se rappeler que les réponses FIR sont toujours stables.

- (c) Il faut calculer la convolution entre $x(n)$ et $h(n)$. On peut utiliser la méthode graphique présentée au cour, ce qui donne



1.5.3 Solutions des exercices de la section 1.3

À FAIRE.

1.5.4 Solutions des exercices de la section 1.4

- (a) La fréquence de la sinusoïde est $f = 100$ Hz, donc pour appliquer le théorème de l'échantillonnage il faut choisir $f_S > 200$ Hz.
(b) f_S doit être *strictement* supérieur à 200 Hz. Dans le cas contraire on aurait $\bar{x}(n) = 0$ qui correspondrait à une sinusoïde de fréquence $f = 0$ Hz.
- (a) On impose $\cos(\pi n/4) = \cos(2\pi f_P n T)$, où f_P est la fréquence perçue, qui en général est différente de la fréquence réelle f . Comme vu au cours, on a

$$\pi n/4 = 2\pi f_P n T + N 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

et la solution est

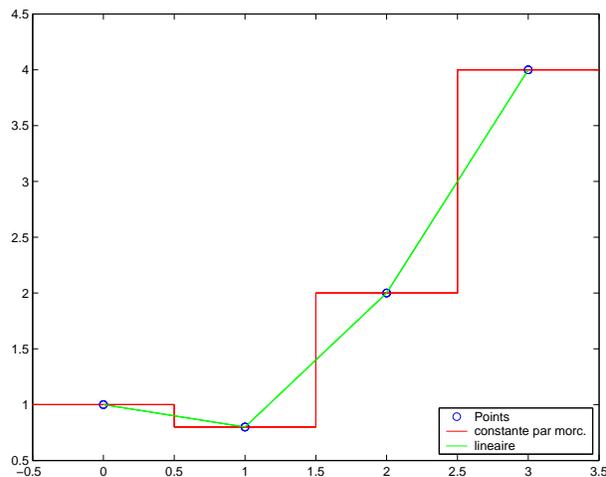
$$f_P = 1/8 f_S + N f_S.$$

Deux valeurs possibles de f_P sont par exemple 125 Hz et 1125 Hz, ou bien -875 Hz et 5125 Hz.

- (b) On a vu que l'interpolateur idéal donne, parmi toutes les fréquences f_P , celle qui en valeur absolue est inférieure à $f_S/2$. Dans ce cas, on a $f = f_S/8 = 125$ Hz. Le signal reconstruit est naturellement

$$y(t) = \cos(2\pi f t) = \cos(250\pi t).$$

- Le signal $x(t)$ est composé de deux sinusoïdes. On a vu que la bande du signal B est le maximum de fréquences des sinusoïdes qui composent le signal, donc $B = 20$ Hz. Pour appliquer le théorème de Shannon-Nyquist il faut choisir $f_S > 2B$, donc $f_S > 40$ Hz.
- (a) Les points, l'interpolation constante par morceaux et linéaire sont montrés dans la figure suivante :



(b) On a

$$y(t) = \text{rect}(t) + 0.8\text{rect}(t - 1) + 2\text{rect}(t - 2) + 4\text{rect}(t - 3),$$

(c) et

$$y(t) = \text{triang}(t) + 0.8\text{triang}(t - 1) + 2\text{triang}(t - 2) + 4\text{triang}(t - 3).$$

(d) Comme dans les notes on écrit

$$L_0(t) = \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{(-1)(-2)(-3)} = \frac{-t^3 + 6t^2 - 11t + 6}{6},$$

$$L_1(t) = \frac{t(t-1)(t-3)}{1(1-2)(1-3)} = \frac{t^3 - 5t^2 + 6t}{2},$$

$$L_2(t) = \frac{t(t-1)(t-3)}{2(2-1)(2-3)} = \frac{-t^3 + 4t^2 - 3t}{2},$$

$$L_3(t) = \frac{t(t-1)(t-2)}{3(3-1)(3-2)} = \frac{t^3 - 3t^2 + 2t}{6}.$$

L'interpolation de Lagrange est

$$y(t) = L_0(t) + 0.8L_1(t) + 2L_2(t) + 4L_3(t).$$

5. (a) Les deux échantillonnages donnent :

$$\begin{aligned} \sin(2\pi \frac{f}{f_{S1}} n) &= 0 \\ \sin(2\pi \frac{f}{f_{S2}} n) &= 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Si on se rappelle que le sinus vaut zéro pour tous les multiples de π on doit avoir que

$$\begin{aligned} \frac{f}{f_{S1}} &= \frac{k_1}{2} \\ \frac{f}{f_{S2}} &= \frac{k_2}{2} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Pour satisfaire les deux équations *en même temps*, il faut que f soit en même temps multiple de $f_{S1}/2$ et de $f_{S2}/2$, donc f doit être multiple du plus petit commun multiple (PPCM)

$$f = k \text{ ppcm} \left(\frac{f_{S1}}{2}, \frac{f_{S2}}{2} \right) = k30 \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Si on avait échantillonné une seule fois à la fréquence $f_S = 60$ Hz on aurait obtenu de la même façon que $f = kf_S/2 = k30$ Hz.

6. (a) La fréquence de la sinusoïde est $f = 60$ Hz, donc pour appliquer le théorème de l'échantillonnage il faut choisir $f_S > 120$ Hz.

(b) f_S doit être *strictement* supérieur à 120 Hz. Dans le cas contraire on aurait $\bar{x}(n) = 0$. Il faut se rappeler que l'interpolateur idéal reconstruit toujours la sinusoïde à la moindre fréquence parmi toutes les solutions possibles compatibles avec le signal échantillonné. Donc, dans le cas de cet exercice, les valeurs possibles de fréquence sont $f = k120$ Hz et l'interpolateur idéal reconstruirait une sinusoïde à la fréquence de 0Hz,

$$x(t) = \sin(2\pi 0t) = 0.$$

7. (a) On impose $\cos(\pi n/4) = \cos(2\pi f_P n T)$, où f_P est la fréquence perçue, qui en général est différente de la fréquence réelle f . Comme vu au cours, on a

$$\pi n/4 = 2\pi f_P n T + N 2\pi, \quad N, n \in \mathbb{Z},$$

et la solution est

$$f_P = 1/8 f_S + M f_S, \quad M \in \mathbb{Z}.$$

Deux valeurs possibles de f_P sont par exemple 125 Hz et 1125 Hz, ou bien -875 Hz et 5125 Hz.

- (b) On a vu que l'interpolateur idéal donne, parmi toutes les fréquences f_P , celle qui en valeur absolue est inférieure à $f_S/2$. Dans ce cas, on a $f_P = f_S/8 = 125$ Hz. Le signal reconstruit est naturellement

$$y(t) = \cos(2\pi f_P t) = \cos(250\pi t).$$

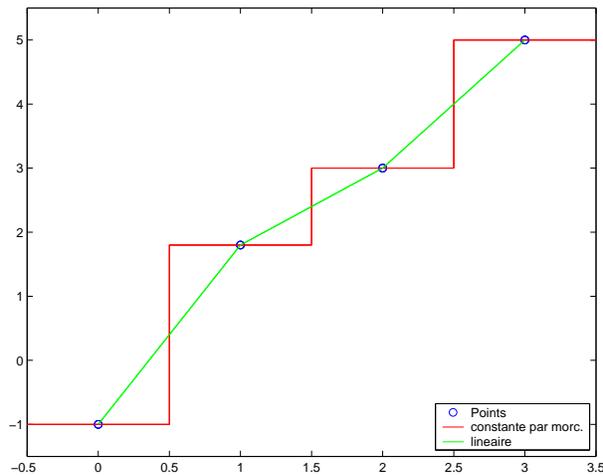
8. Le signal $x(t)$ est composé de deux sinusoïdes. On a vu que la bande du signal B est le maximum de fréquences des sinusoïdes qui composent le signal, donc $B = 25$ Hz. Pour éviter l'aliasing il faut choisir $f_S > 2B$, donc $f_S > 50$ Hz. Si on échantillonne à 40 Hz et qu'on utilise l'interpolateur idéal, la composante à 12.5 Hz est reconstruite exactement, car sa fréquence est inférieure à la fréquence de Nyquist qui vaut 20 Hz. Par contre, la deuxième composante dépasse la fréquence de Nyquist et donnera l'aliasing. Les fréquences possibles qui correspondent aux échantillons de la deuxième composante sont :

$$f_{P2} = 25 + k40 \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On sait que l'interpolateur idéal reconstruit la fréquence qui en valeur absolue est inférieure à la fréquence de Nyquist. Dans ce cas, on trouve cette fréquence quand $k = -1$, $f_{P2} = -15$ Hz. En conclusion, le signal reconstruit est :

$$y(t) = \sin(25\pi t) + \cos(2\pi f_{P2} t) = \sin(25\pi t) + \cos(-30\pi t) = \sin(25\pi t) + \cos(30\pi t).$$

9. (a) Les points, l'interpolation constante par morceaux et linéaire sont montrés dans la figure suivante :



(b) On a

$$y(t) = -\text{rect}(t) + 1.8\text{rect}(t-1) + 3\text{rect}(t-2) + 5\text{rect}(t-3),$$

(c) et

$$y(t) = -\text{triang}(t) + 1.8\text{triang}(t-1) + 3\text{triang}(t-2) + 5\text{triang}(t-3).$$

(d) Comme dans les notes on écrit

$$L_0(t) = \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{(-1)(-2)(-3)} = \frac{-t^3 + 6t^2 - 11t + 6}{6},$$

$$L_1(t) = \frac{t(t-1)(t-3)}{1(1-2)(1-3)} = \frac{t^3 - 5t^2 + 6t}{2},$$

$$L_2(t) = \frac{t(t-1)(t-3)}{2(2-1)(2-3)} = \frac{-t^3 + 4t^2 - 3t}{2},$$

$$L_3(t) = \frac{t(t-1)(t-2)}{3(3-1)(3-2)} = \frac{t^3 - 3t^2 + 2t}{6}.$$

L'interpolation de Lagrange est

$$y(t) = -L_0(t) + 1.8L_1(t) + 3L_2(t) + 5L_3(t).$$