Mini-projet IGAT-GR-HE
(Prof. Kathryn Hess Bellwald)

# La supension et l'espace de lacets d'un espace topologique

*Auteurs :*
Marielle Corthésy
Marie Dupraz

*Supervisé par :*
Varvara Karpova

Dernière modification le 14 mai 2010

# Table des matières

**Résumé**

Ce travail présente l'espace des lacets et la suspension réduite d'un espace topologique. Pour traiter ces concepts importants de la topologie algébrique, nous introduisons la théorie de l'homotopie ainsi que quelques structures algébriques. Ces bases nous permettent de développer certains résultats, dont le plus important est la commutativité des groupes d'homotopie supérieurs.

# 1 Introduction

Le but de ce mini-projet est d'apprendre à connaître, d'un point de vue homotopique, les constructions fondamentales en topologie algébrique que sont l'espace de lacets $\Omega X$ et la suspension réduite $\Sigma X$ d'un espace topologique $X$ donné.

Dans un premier temps, nous définissons les notions d'homotopie (pointée) d'applications continues et de groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ d'un espace topologique pointé $(X, x_0)$. Puis, dans un cadre plus général, nous étudions la notion de groupes d'homotopie supérieurs $\pi_n(X, x_0)$ pour $n \geq 2$.

L'objectif est de montrer que l'ensemble $\pi_n(X, x_0)$ est un groupe pour $n \geq 1$, et est même abélien pour $n \geq 2$. Pour cela, il nous faut munir les classes d'homotopie de structures de groupe. Pour comprendre la manière dont ces structures se construisent, nous allons définir les notions de H-groupe et de co-H-groupe. Nous illustrons ensuite ces concepts algébriques par leurs principaux exemples qui sont respectivement l'espace des lacets $\Omega X$ et la suspension réduite $\Sigma X$.

# 2 Homotopie et groupe fondamental

L'approche adoptée dans cette première partie est celle du cours d'Eléments d'homotopie [Hes].

**Remarque**
On considère toujours $I = [0,1]$ et $X, Y$ des espaces topologiques.

## 2.1 Homotopie

### 2.1.1 Définitions générales

**Définition 2.1** (Homotopie)
*Soient $f, g : X \to Y$ des applications continues. Une* homotopie *de $f$ vers $g$ est une application continue $H : X \times I \to Y$ telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$ pour tout $x \in X$.*

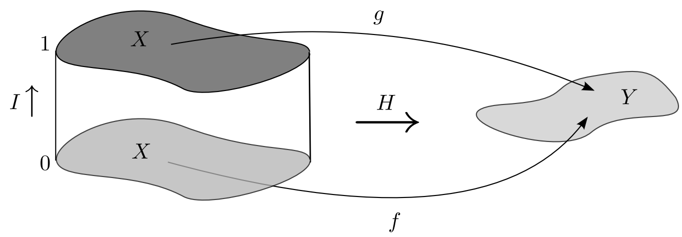


Figure 1: Homotopie

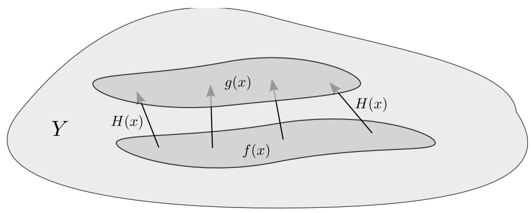


Figure 2: Homotopie

Les figures 1 et 2 illustrent la notion d'homotopie d'applications continues.

On peut aussi se représenter une homotopie $H : X \times I \to Y$ comme une application continue faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, hook, "i_0"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X \times I \arrow[r, dotted, "\exists H"] & Y, \\
X \arrow[u, hook', "i_1"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Diagramme 3: Homotopie

où $i_0 : X \to X \times I$ est définie par $i_0(x) = (x,0)$ et $i_1 : X \to X \times I$ est définie par $i_1(x) = (x,1)$.

**Définition 2.2** (Homotopie relative)
*Soit $A \subset X$ un sous-espace de $X$ et soient $f, g : X \to Y$ des applications continues telles que $f_{|_A} = g_{|_A}$. Une* homotopie relative *à $A$ de $f$ vers $g$ est une homotopie $H : X \times I \to Y$ telle que $H(a,t) = f(a) = g(a)$ pour tout $a \in A$ et pour tout $t \in I$.*

De la même manière que précédemment, on peut représenter une homotopie relative sous la forme d'un diagramme commutatif. Nous avons besoin cette fois-ci de plusieurs diagrammes pour représenter cette notion. Le premier illustre la restriction à $A$ des applications $f$ et $g$, ainsi que leur égalité sur le sous-espace $A$. Le second est celui d'une homotopie simple et le dernier réunit les deux premiers. La compréhension de l'homotopie relative résulte donc de la lecture du troisième diagramme ci dessous.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, "f"] & & \\
A \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] \arrow[rr, "f_{|_A}=g_{|_A}"] & & Y \\
X \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, hook, "i_0"'] \arrow[drr, "f"] & & \\
X \times I \arrow[rr, dotted, "\exists H"] & & Y \\
X \arrow[u, hook, "i_1"] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi"] & Y. \\
A \arrow[ur, "f_{|_A}=g_{|_A}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Diagramme 4: Homotopie relative à $A \subset X$

Ici $i_0$ et $i_1$ sont définis de la même manière que dans le diagramme 3, et $\pi$ est la projection de $A \times I$ dans $A$.

### 2.1.2 Espaces pointés

**Définition 2.3** (Point de base et espace topologique pointé)
*Soit $x_0 \in X$. Le sous-espace $\{x_0\}$ est appelé le* point de base *de $X$, et le couple $(X, x_0)$ représente alors un* espace topologique pointé*.*

**Définition 2.4** (Application et homotopie pointées)
*Soient $(X, x_0)$ et $(Y, y_0)$ des espaces topologiques pointés. On dit que l'application continue $f : X \to Y$ est* pointée *si $f(x_0) = y_0$. Si $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ sont pointées, on appelle une homotopie $H : X \times I \to Y$ de $f$ vers $g$ relative à $x_0$ une* homotopie pointée *(relative à $x_0$). On a alors $H(x_0, t) = y_0$ pour tout $t \in I$.*

**Définition 2.5** *(i) Soient $f, g : X \to Y$. On définit la relation $f \simeq g$ si et seulement s'il existe une homotopie de $f$ vers $g$.*

*(ii) Soient $(X, x_0)$ et $(Y, y_0)$ des espaces topologiques pointés et $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ des applications continues pointées. On définit la relation $f \simeq_* g$ si et seulement s'il existe une homotopie pointée de $f$ vers $g$.*

**Proposition 2.6** *(i) La relation $\simeq$ est une relation d'équivalence.*

*(ii) La relation $\simeq_*$ est une relation d'équivalence.*

*Démonstration.* (i) – On définit l'homotopie constante $H : X \times I \to Y$ par

$$H(x,t) = f(x),$$

pour tout $x \in X$ et pour tout $t \in I$. La continuité de $H$ découle de la continuité de $f$. De plus, on a, en particulier, $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = f(x)$. D'où, $f \simeq f$ et $\simeq$ est réflexive.

– Supposons $f \simeq g$. Il existe alors une homotopie $H : X \times I \to Y$ telle que, pour tout $x \in X$, $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$. On définit l'homotopie $G : X \times I \to Y$ de $g$ vers $f$ par

$$G(x,t) = H(x, 1-t)$$

pour tout $x \in X$ et pour tout $t \in I$. La continuité de $G$ est assurée par celle de $H$. On remarque que cette application vérifie bien $G(x,0) = H(x,1) = g(x)$ et $G(x,1) = H(x,0) = f(x)$. D'où, $g \simeq f$ et $\simeq$ est symétrique.

– Supposons $f \simeq g$ et $g \simeq h$. Il existe alors deux homotopies $G, H : X \times I \to Y$ telles que, pour tout $x \in X$, $G(x,0) = f(x)$, $G(x,1) = g(x)$, $H(x,0) = g(x)$ et $H(x,1) = h(x)$. On définit l'homotopie $K : X \times I \to Y$ de $f$ vers $h$ par

$$K(x,t) = \begin{cases} G(x,2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(x,2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Puisque $K(x,1/2) = G(x,1) = g(x) = H(x,0) = K(x,1/2)$ et que $G$ et $H$ sont continues, $K$ est bien continue. De plus, on a bien $K(x,0) = G(x,0) = f(x)$ et $K(x,1) = H(x,1) = g(x)$. D'où, $f \simeq h$ et $\simeq$ est transitive.

Finalement, $\simeq$ est bien une relation d'équivalence.

(ii) Pour montrer que $\simeq_*$ est une relation d'équivalence, il suffit de procéder de la même manière que précédemment mais avec des homotopies pointées. Il faut donc vérifier que chaque homotopie construite en (i) reste relative à $\{x_0\}$. Nous ne montrons donc que ce dernier point. Soit $y_0 = f(x_0)$.

– On a $H(x,t) = f(x)$ pour tout $x \in X$ et pour tout $t \in I$ et donc, en particulier, $H(x_0,t) = f(x_0) = y_0$ pour tout $t \in I$.

– On a $G(x,t) = H(x,1-t)$ pour tout $x \in X$ et pour tout $t \in I$ et donc, en particulier, $G(x_0,t) = H(x_0,1-t) = f(x_0) = y_0$ pour tout $t \in I$.

– De manière similaire, puisque $G$ et $H$ sont des homotopies pointées, $K$ est une homotopie pointée en $\{x_0\}$. En effet,

$$\begin{aligned} K(x_0,t) &= \begin{cases} G(x_0,2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(x_0,2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} y_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ y_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= y_0 \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

□

**Notation 2.7**
Soit $f$ une application continue. On note

(i) $[f]$ la classe d'équivalence de $f$ par rapport à la relation $\simeq$ ;

(ii) $[f]_*$ la classe d'équivalence de $f$ par rapport à la relation $\simeq_*$.

**Définition 2.8** (Equivalence et inverse homotopiques) (*i*) *On dit qu'une application continue $f : X \to Y$ est une* équivalence d'homotopie *s'il existe une application continue $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$ et $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$. Alors $g$ est appelée* inverse homotopique *de $f$.*

(*ii*) *Une application continue pointée $f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ est une* équivalence d'homotopie pointée *s'il existe une application continue pointée $g : (Y,y_0) \to (X,x_0)$ telle que $g \circ f \simeq_* \mathrm{Id}_{(X,x_0)}$ et $f \circ g \simeq_* \mathrm{Id}_{(Y,y_0)}$.*

**Définition 2.9** (*i*) *Deux espaces topologiques $X$ et $Y$ ont le* même type d'homotopie *s'il existe une équivalence d'homotopie $f : X \to Y$. On note $X \simeq Y$.*

(*ii*) *Deux espaces topologiques pointés $(X, x_0)$ et $(Y, y_0)$ ont le* même type d'homotopie *s'il existe une équivalence d'homotopie pointée $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. On note $(X, x_0) \simeq_* (Y, y_0)$.*

**Définition 2.10** (Espace contractile)
*Soit $x_0 \in X$.*

(*i*) *Si $X \simeq \{x_0\}$, l'espace topologique $X$ est dit* contractile.

(*ii*) *Si $(X, x_0) \simeq_* (\{x_0\}, x_0)$, on dit que l'espace topologique pointé $(X, x_0)$ est* contractile pointé.

Un espace contractile est un espace qui a le même type d'homotopie qu'un point. Autrement dit, on peut intuitivement se représenter un espace contractile comme un espace ne possédant pas de « trou ».

## 2.2 Chemin et concaténation de chemins

**Définition 2.11** (Chemin)
*Soit un espace topologique $X$. On appelle* chemin *dans $X$ une application continue $\lambda : I \to X$.*

**Définition 2.12** (Homotopie de chemins pointée)
*Soient $x_0$, $x_1 \in X$. Soient $\lambda, \lambda' : I \to X$ des chemins tels que $\lambda(0) = x_0 = \lambda'(0)$ et $\lambda(1) = x_1 = \lambda'(1)$. Une* homotopie de chemins pointée *de $\lambda$ vers $\lambda'$ est une homotopie relative à $\{0, 1\}$.*
*Autrement dit, c'est la donnée d'une application continue $H : I \times I \to X$ telle que*

$$H(s, 0) = \lambda(s),\ H(s, 1) = \lambda'(s)\ \forall s \in I$$
$$\text{et } H(0, t) = x_0,\ H(1, t) = x_1\ \forall t \in I.$$

*Ainsi, on peut écrire*

$$\lambda \simeq_* \lambda' \text{ si et seulement si } \lambda(0) = \lambda'(0),\ \lambda(1) = \lambda'(1) \text{ et } \lambda \simeq_{\{0,1\}} \lambda'.$$

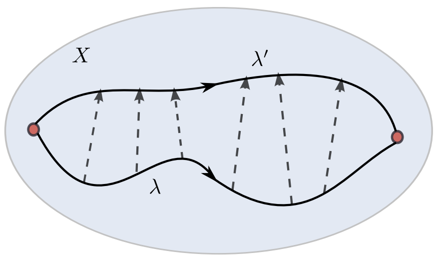


Figure 5: Homotopie de chemin

**Définition 2.13** (Concaténation)
*Soient $\lambda_1, \lambda_2 : I \to X$ des chemins tels que $\lambda_1(1) = \lambda_2(0)$. Le chemin $\lambda_1 \star \lambda_2$, obtenu par* concaténation *de $\lambda_1$ et $\lambda_2$, est donné par*

$$\begin{array}{rccl} \lambda_1 \star \lambda_2 : & I & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} \lambda_1(2t) & si\ 0 \leq t \leq 1/2, \\ \lambda_2(2t-1) & si\ 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \end{array}$$

**Remarque 2.14**
La concaténation de deux chemins continus reste un chemin continu. En effet, si $t = 1/2$, on a $\lambda_1(1) = \lambda_2(0)$ par hypothèse.

**Proposition 2.15**
*Soient* $\lambda_1, \lambda_1', \lambda_2, \lambda_2' : I \to X$ *des chemins tels que* $\lambda_1(0) = x_0 = \lambda_1'(0)$, $\lambda_1(1) = \lambda_1'(1) = x_1 = \lambda_2(0) = \lambda_2'(0)$ *et* $\lambda_2(1) = x_2 = \lambda_2'(1)$. *Si* $\lambda_1 \simeq_* \lambda_1'$ *et* $\lambda_2 \simeq_* \lambda_2'$, *alors on a*

$$\lambda_1 \star \lambda_2 \simeq_* \lambda_1' \star \lambda_2'.$$

*Démonstration.* Comme $\lambda_1 \simeq_* \lambda_1'$, on sait qu'il existe une homotopie $H : I \times I \to X$ telle que $H(s, 0) = \lambda_1(s)$ et $H(s, 1) = \lambda_1'(s)$ pour tout $s \in I$. De même, comme $\lambda_2 \simeq_* \lambda_2'$, on sait qu'il existe une homotopie $K : I \times I \to X$ telle que $K(s, 0) = \lambda_2(s)$ et $K(s, 1) = \lambda_2'(s)$ pour tout $s \in I$.
On définit alors

$$\begin{aligned} H \star K : \quad I \times I &\longrightarrow X \\ (s,t) &\longmapsto \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ K(2s-1, t) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Tout d'abord, on note que $H \star K$ est continue pour tout $t \in I$ fixé par la Remarque 2.14. De plus,

$$\begin{aligned} (H \star K)(s, 0) &= \begin{cases} H(2s, 0) = \lambda_1(s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ K(2s-1, 0) = \lambda_2(s) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases} \\ &= (\lambda_1 \star \lambda_2)(s) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (H \star K)(s, 1) &= \begin{cases} H(2s, 1) = \lambda_1'(s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ K(2s-1, 1) = \lambda_2'(s) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases} \\ &= (\lambda_1' \star \lambda_2')(s). \end{aligned}$$

Enfin,

$$(H \star K)(0, t) = H(0, t) = \lambda_1(0) = x_0 \ \forall t \in I$$

et

$$(H \star K)(1, t) = K(1, t) = \lambda_2(1) = x_1 \ \forall t \in I.$$

Ainsi, $H \star K$ est une homotopie de chemins pointée de $\lambda_1 \star \lambda_2$ vers $\lambda_1' \star \lambda_2'$, et donc on a $\lambda_1 \star \lambda_2 \simeq_* \lambda_1' \star \lambda_2'$.

□

**Proposition 2.16** (Propriétés algébriques de la concaténation)

(*i*) *Associativité à homotopie près :*
*Soient* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 : I \to X$ *des chemins tels que* $\lambda_1(1) = \lambda_2(0)$ *et* $\lambda_2(1) = \lambda_3(0)$. *Alors on a*

$$(\lambda_1 \star \lambda_2) \star \lambda_3 \simeq_* \lambda_1 \star (\lambda_2 \star \lambda_3)$$

(*ii*) *Existence de l'élément neutre à homotopie près :*
*Soit* $\lambda : I \to X$ *un chemin tel que* $\lambda(0) = x_0$ *et* $\lambda(1) = x_1$. *Si* $x \in X$, *on définit*

$$\begin{array}{rccc} c_x : & I & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & x \end{array}$$

*le chemin constant. Alors on a*

$$c_{x_0} \star \lambda \simeq_* \lambda \simeq_* \lambda \star c_{x_1}.$$

(*iii*) *Existence d'inverse à homotopie près :*
*Soient* $\lambda : I \to X$ *un chemin et* $\overline{\lambda} : I \to X$ *le chemin défini par* $\overline{\lambda}(t) = \lambda(1-t)$ *pour tout* $t \in I$. *Alors si* $x_0 = \lambda(0)$ *et* $x_1 = \lambda(1)$, *on a*

$$\lambda \star \overline{\lambda} \simeq_* c_{x_0} \text{ et } \overline{\lambda} \star \lambda \simeq_* c_{x_1}.$$

*Démonstration.* L'idée ici est d'expliquer les propriétés par des figures.

(i) Considérons la figure 6. L'arête du bas correspond à $(\lambda_1 \star \lambda_2) \star \lambda_3$. Le chemin $\lambda_1$ est parcouru alors pendant le premier quart du temps, $\lambda_2$ pendant le quart suivant, et $\lambda_3$ pendant la deuxième moitié. L'arête du haut correspond à $\lambda_1 \star (\lambda_2 \star \lambda_3)$. Cette fois, $\lambda_1$ est parcouru pendant la première moitié du temps, $\lambda_2$ pendant le quart suivant, et $\lambda_3$ pendant le dernier quart. On construit alors l'homotopie en ralentissant sur $\lambda_1$ et en accélérant sur $\lambda_3$ de telle manière à ce qu'on mette toujours la moitié du temps à parcourir la concaténation entre parenthèses.

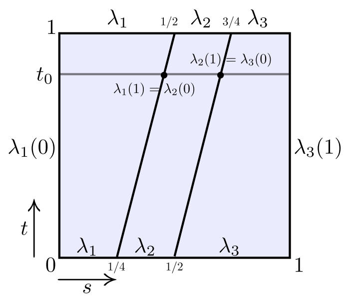


Figure 6: Homotopie de chemin

(ii) Considérons d'abord le carré de gauche de la figure 7. Elle représente $c_{x_0} \star \lambda \simeq_* \lambda$. L'arête du bas correspond donc à $c_{x_0} \star \lambda$, où chaque chemin est parcouru durant la moitié du temps et va être envoyé par l'homotopie vers l'arête du haut qui correspond à $\lambda$. Ainsi, tous les points du triangle plus foncé sont envoyés sur $x_0$ et, au temps $t = 1$, on parcourt $\lambda$ deux fois plus lentement qu'au temps $t = 0$.
Le carré de droite de la figure 7 représente $\lambda \star c_{x_0}$. L'homotopie fait cette fois ralentir le parcours de $\lambda$, qui ne prend que la moitié du temps.

(iii) On pose

$$\begin{array}{rccc} H : & I \times I & \longrightarrow & X \\ & (s,t) & \longmapsto & (\lambda_t \star \overline{\lambda_t})(s) \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rccc} \lambda_t : & I & \longrightarrow & X \\ & s & \longmapsto & \lambda(ts) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \overline{\lambda_t} : & I & \longrightarrow & X \\ & s & \longmapsto & \lambda((1-s)t). \end{array}$$

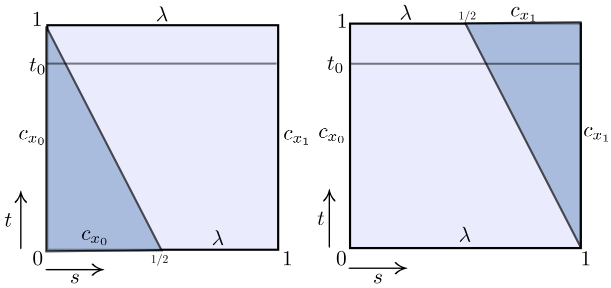


Figure 7: Inverse

Alors $H$ est continue par la Remarque 2.14, car $\lambda_t$ et $\overline{\lambda_t}$ sont des chemins continus. De plus,

$$H(s,0) = (\lambda_0 \star \overline{\lambda_0})(s) = c_{x_0}(s),$$

car $\lambda_0 = c_{x_0} = \overline{\lambda}_0$ et donc $\lambda_0 \star \overline{\lambda}_0 = c_{x_0}$, et

$$H(s,1) = (\lambda_1 \star \overline{\lambda_1})(s) = (\lambda \star \overline{\lambda})(s),$$

car $\lambda_1 = \lambda$ et $\overline{\lambda}_1 = \overline{\lambda}$. Enfin,

$$H(0,t) = (\lambda_t \star \overline{\lambda_t})(0) = \lambda_t(0) = \lambda(0) = x_0$$

et

$$H(1,t) = (\lambda_t \star \overline{\lambda_t})(1) = \overline{\lambda_t}(1) = \lambda(0) = x_0.$$

Ainsi, H est une homotopie de chemins de $c_{x_0}$ vers $\lambda \star \overline{\lambda}$, et donc $\lambda \star \overline{\lambda} \simeq_* c_{x_0}$. On fait de même pour montrer que $\overline{\lambda} \star \lambda \simeq_* c_{x_1}$.

□

On peut également montrer ces propriétés par des calculs formels, comme on l'a vu en cours de Topologie [Buf09]. Pour cela, on a besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.17**
*Si $\lambda : I \to X$ est un chemin et $r : I \to I$ une fonction continue telle que $r(0) = 0$ et $r(1) = 1$, alors*

$$\lambda \simeq_* \lambda \circ r.$$

*Démonstration.* Posons

$$\begin{array}{rccl} H: & I \times I & \longrightarrow & X \\ & (s,t) & \longmapsto & \lambda((1-t)s + tr(s)). \end{array}$$

Notons que $H$ est bien définie car $(1-t)s + tr(s) \in [0,1]$ et qu'elle est continue par composition de fonctions continues. De plus,

$$H(s,0) = \lambda(s),\ H(s,1) = \lambda(r(s)),\ \forall s \in [0,1]$$

et

$$H(0,t) = \lambda(tr(0)) = \lambda(0),\ H(1,t) = \lambda(1 - t + tr(1)) = \lambda(1)\ \forall t \in [0,1],$$

car $r(0) = 0$ et $r(1) = 1$.
Ainsi, $H$ définit bien une homotopie de $\lambda$ vers $\lambda \circ r$. □

Montrons à présent les propriétés de la Proposition 2.16 par des calculs formels.

*Démonstration formelle de la Proposition 2.16.*

(i) On pose

$$((\lambda_1 \star \lambda_2) \star \lambda_3)(s) = \begin{cases} \lambda_1(4s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/4, \\ \lambda_2(4s-1) & \text{si } 1/4 \leq s \leq 1/2, \\ \lambda_3(2s-1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

et

$$(\lambda_1 \star (\lambda_2 \star \lambda_3))(s) = \begin{cases} \lambda_1(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \lambda_2(4s-2) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ \lambda_3(4s-3) & \text{si } 3/4 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

On remarque alors que si

$$r(s) = \begin{cases} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq 1/4, \\ s + 1/4 & \text{si } 1/4 \leq s \leq 1/2, \\ 1/2(s+1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

alors on a bien $r(0) = 0$, $r(1) = 1$ et $\mathrm{Im}(r) \subseteq I$. De plus, on a $(\lambda_1 \star \lambda_2) \star \lambda_3 = \lambda_1 \star (\lambda_2 \star \lambda_3) \circ r$, et donc par le Lemme 2.17

$$\lambda_1 \star (\lambda_2 \star \lambda_3) \simeq_* \lambda_1 \star (\lambda_2 \star \lambda_3) \circ r = (\lambda_1 \star \lambda_2) \star \lambda_3$$

(ii) Montrons que $\lambda \simeq_* \lambda \star c_{x_1}$. L'équivalence $c_{x_0} \star \lambda \simeq_* \lambda$ se montre de la même manière.
On pose

$$(\lambda \star c_{x_1})(s) = \begin{cases} \lambda(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ x_1 = \lambda(1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

et

$$r(s) = \begin{cases} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Alors on a bien $r(0) = 0$, $r(1) = 1$, $\mathrm{Im}(r) \subseteq I$, et on remarque que $\lambda \star c_{x_1} = \lambda \circ r$, et donc, par le Lemme 2.17, $\lambda \simeq_* \lambda \circ r = \lambda \star c_{x_1}$.

(iii) Montrons que $\lambda \star \overline{\lambda} \simeq_* c_{x_0}$. L'équivalence $\overline{\lambda} \star \lambda \simeq_* c_{x_1}$ se montre de la même manière. On a

$$\lambda \star \overline{\lambda} = \begin{cases} \lambda(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \lambda(2-2s) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Alors si on pose

$$H(s,t) = \begin{cases} \lambda(2st) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \lambda(2t-2st) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

on a

$$H(s,0) = \lambda(0) = x_0 = c_{x_0}(s),\ H(s,1) = (\lambda \star \overline{\lambda})(s),\ \forall s \in I$$

et

$$H(0,t) = \lambda(0) = x_0,\ H(1,t) = \lambda(0) = x_0,\ \forall t \in I.$$

Ainsi, on a bien une homotopie de $c_{x_0}$ vers $\lambda \star \overline{\lambda}$.

□

## 2.3 Groupe fondamental

**Terminologie 2.18**
On appelle *lacet* basé en $x_0$ un chemin $\lambda : I \to X$ tel que $\lambda(0) = x_0 = \lambda(1)$.

**Définition 2.19** (Groupe fondamental)
*Soit* $(X, x_0)$ *un espace topologique pointé. Le* groupe fondamental *de* $(X, x_0)$ *est défini par*

$$\pi_1(X, x_0) := \{[\lambda]_* \mid \lambda : I \to X \text{ est un lacet basé en } x_0\}.$$

**Proposition 2.20**
*L'opération binaire*

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \\ & ([\lambda]_*\ ,\ [\lambda']_*) & \longmapsto & [\lambda]_* \cdot [\lambda']_* := [\lambda \star \lambda']_* \end{array}$$

*est bien définie et munit* $\pi_1(X, x_0)$ *d'une structure de groupe.*

*Démonstration.*
- Montrons que l'application binaire $\cdot$ est bien définie. Soient $f' \in [f]_*$ et $g' \in [g]_*$, on a alors $f' \simeq_* f$ et $g' \simeq_* g$ et, par la Proposition 2.15, $f \star g \simeq_* f' \star g'$. Autrement dit, $[f \star g]_* = [f' \star g']_*$ et donc $[f]_* \cdot [g]_* = [f']_* \cdot [g']_*$, ce qui implique que $\cdot$ est bien définie.
- Montrons que $(\pi_1(X, x_0), \ \cdot\ )$ est un groupe. On commence par vérifier l'associativité de la loi de groupe. Soient $[f]_*$, $[g]_*$, et $[h]_* \in \pi_1(X, x_0)$. On a alors

$$\begin{aligned} ([f]_* \cdot [g]_*) \cdot [h]_* &= [f \star g]_* \cdot [h]_* \\ &= [(f \star g) \star h]_* \\ &= [f \star (g \star h)]_* \\ &= [f]_* \cdot [g \star h]_* \\ &= [f]_* \cdot ([g]_* \cdot [h]_*), \end{aligned}$$

  où la troisième égalité suit de la Proposition 2.16. Par conséquent, l'associativité est vérifiée.
- Soit $c_{x_0}$ le lacet constant en $x_0$. Vérifions que $[c_{x_0}]_*$ est l'élément neutre pour la loi de groupe. On a

$$[f]_* \cdot [c_{x_0}]_* = [f \star c_{x_0}]_* = [f]_*, \ \forall [f]_* \in \pi_1(X, x_0),$$

  où la dernière égalité suit de la Proposition 2.16. On montre de la même manière que $[c_{x_o}]_* \cdot [f]_* = [f]_*$ et donc $[c_{x_0}]_*$ est bien l'élément neutre.
- Montrons finalement que $\left[\bar{f}\right]_*$, où $\bar{f}$ est définie comme dans la Proposition 2.16, est l'inverse de $[f]_*$ par rapport à la loi de groupe. On a

$$[f]_* \cdot \left[\bar{f}\right]_* = \left[f \star \bar{f}\right]_* = [c_{x_0}]_* = \left[\bar{f}\right]_* \cdot [f]_*, \ \forall [f]_* \in \pi_1(X, x_0),$$

  où la seconde égalité suit de la Proposition 2.16. Ainsi, $\left[\bar{f}\right]_*$ est bien l'inverse de $[f]_*$.

Finalement, nous avons montré que $\pi_1(X, x_0)$ possède une structure de groupe. □

**Remarque 2.21**
On a construit une application

$$\pi_1 : \{\text{espaces topologiques pointés}\} \to \{\text{groupes}\}.$$

On peut donc, via cette application, associer un groupe à tout espace topologique pointé.

Le but est maintenant de montrer que le groupe fondamental est un invariant homotopique, c'est-à-dire que les groupes fondamentaux de deux espaces pointés qui ont le même type d'homotopie sont isomorphes. Pour cela, nous avons besoin des deux propositions suivantes :

**Proposition 2.22**
*Soit $p : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application continue pointée. L'application*

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 p : & \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, y_0) \\ & [f]_* & \longmapsto & [p \circ f]_* \end{array}$$

*est un homomorphisme de groupes bien défini.*

*Démonstration.* – Montrons que $\pi_1 p$ est bien définie. Soit $g \in [f]_*$, il existe donc une homotopie pointée $H : I \times I \to X$ de $f$ vers $g$. On remarque que l'application

$$p \circ H : I \times I \to Y$$

est également une homotopie pointée. En effet, $p \circ H$ est continue comme composition d'applications continues. De plus, on a $(p \circ H)(x, 0) = p(f(x))$ et $(p \circ H)(x, 1) = p(g(x))$. On sait aussi que $H(0, t) = H(1, t) = x_0$, ce qui implique que $(p \circ H)(0, t) = p(g(x_0)) = y_0$ et $(p \circ H)(1, t) = p(g(x_0)) = y_0$. Donc, $p \circ H$ est une homotopie pointée et par conséquent, $[p \circ f]_* = [p \circ g]_*$. Ainsi, $\pi_1 p$ est bien définie.

– Nous allons montrer que $\pi_1 p$ est bien un homomorphisme de groupes. Soient $[f]_*$, $[g]_* \in \pi_1(X, x_0)$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \pi_1 p\left([f]_* \cdot [g]_*\right) &= \pi_p\left([f \star g]_*\right) \\ &= [p \circ (f \star g)]_* \\ &\overset{(1)}{=} [(p \circ f) \star (p \circ g)]_* \\ &= [p \circ f]_* \cdot [p \circ g]_* \\ &= \pi_1 p\left([f]_*\right) \cdot \pi_1 p\left([g]_*\right). \end{aligned}$$

L'égalité (1) découle de la définition et de la continuité de la concaténation des chemins. De plus, on remarque que

$$\pi_1 p\left([c_{x_0}]_*\right) = [p \circ c_{x_0}]_* = [c_{y_0}]_*,$$

ce qui implique que $\pi_1 p$ est un homomorphisme de groupes.

□

**Proposition 2.23** (Propriétés de $\pi_1$)

(*i*) *Soit $(X, x_0)$ un espace pointé, alors*

$$\pi_1(\mathrm{Id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}.$$

(*ii*) *Soient $p : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ et $q : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ des applications continues pointées, alors*

$$\pi_1(q \circ p) = \pi_1 q \circ \pi_1 p.$$

(*iii*) *Soient* $p, p' : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *des applications continues pointées telles que* $p \simeq_* p'$, *alors*
$$\pi_1 p = \pi_1 p'.$$

*Démonstration.* (i) Soit $[f]_* \in \pi_1(X, x_0)$. On a alors

$$\pi_1(\mathrm{Id}_{(X,x_0)})\,([f]_*) = [\mathrm{Id}_X \circ f]_* = [f]_*,$$

et donc $\pi_1(\mathrm{Id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

(ii) Soient $[f]_* \in \pi_1(X, x_0)$ et $p : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $q : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$. On a alors

$$\begin{aligned}\pi_1(q \circ p)\,([f]_*) &= [(q \circ p) \circ f]_* \\ &= [q \circ (p \circ f)]_* \\ &= \pi_1 q\,([p \circ f]_*) \\ &= \pi_1 q\,(\pi_1 p\,([f]_*)) \\ &= (\pi_1 q \circ \pi_1 p)\,([f]_*)\,,\end{aligned}$$

et donc $\pi_1(q \circ p) = \pi_1 q \circ \pi_1 p$.

(iii) Soient $p, p' : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ telles que $p \simeq_* p'$ et soit $[f]_* \in \pi_1(X, x_0)$, alors

$$\pi_1 p\,([f]_*) = [p \circ f]_* = [p' \circ f]_* = \pi_1 p'\,([f]_*)$$

et donc $\pi_1 p = \pi_1 p'$.

□

**Remarque 2.24**
Les propriétés (i) et (ii) de la proposition ci-dessus codifient ce que l'on appelle la *fonctorialité* de $\pi_1$.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que le groupe fondamental est un invariant homotopique :

**Théorème 2.25**
*Le groupe fondamental est un invariant d'homotopie pointée, autrement dit, pour tous espaces topologiques pointés* $(X, x_0)$ *et* $(Y, y_0)$, *on a*

$$(X, x_0) \simeq_* (Y, y_0) \Rightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0).$$

*Démonstration.* Supposons que $(X, x_0) \simeq_* (Y, y_0)$. Alors il existe $p : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ et $q : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ des applications continues pointées telles que $q \circ p \simeq_* \mathrm{Id}_{(X,x_0)}$ et $p \circ q \simeq_* \mathrm{Id}_{(Y,y_0)}$. On a alors

$$\pi_1 q \circ \pi_1 p \overset{(1)}{=} \pi_1(q \circ p) \overset{(2)}{=} \pi_1 \mathrm{Id}_{(X,x_0)} \overset{(3)}{=} \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)},$$

où les égalités (1), (2) et (3) découlent respectivement de la Propposition 2.23 (ii), (iii) et (i). On obtient de manière similaire $\pi_1 p \circ \pi_1 q = \mathrm{Id}_{(Y,y_0)}$. Ainsi, $\pi_1 q$ et $\pi_1 p$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre et finalement $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$.

□

# 3 H-espace et co-H-espace

Pour cette partie, nous suivons premièrement l'approche de Switzer [Swi75]. Puis, pour la section 3.3, nous adoptons conjointement les méthodes de ce dernier et de Selick [Sel97].

**Remarque**
Dans cette partie, pour tout espace pointé $(X, x_0)$, on note $\mathrm{Id}_{(X,x_0)} = \mathrm{Id}_X$ et on définit la fonction constante

$$\begin{array}{rccc} c_{x_0}: & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & x_0 \end{array}.$$

De plus, pour alléger la notation, on note les classes d'homotopie pointée $[-]$ au lieu de $[-]_*$.

## 3.1 H-espace

**Définition 3.1** (H-espace)
*Soit* $x_0 \in X$. *Un* H-espace *est un espace topologique pointé* $(X, x_0)$ *muni d'une application de multiplication continue* $m : X \times X \to X$ *telle que* $m \circ i_1 \simeq_* \mathrm{Id}_X \simeq_* m \circ i_2$, *où*

$$\begin{array}{rccc} i_1: & X & \longrightarrow & X \times X \\ & x & \longmapsto & (x, x_0) \end{array}$$

*et*

$$\begin{array}{rccc} i_2: & X & \longrightarrow & X \times X \\ & x & \longmapsto & (x_0, x). \end{array}$$

*Cette définition revient à dire que le diagramme suivant commute à homotopie près :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_X"'] & X \times X \arrow[d, "m"] & X \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "\mathrm{Id}_X"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

Diagramme 8: Multiplication

Dans ce diagramme, on a $i_1 = (\mathrm{Id}_X, x_0)$ et $i_2 = (x_0, \mathrm{Id}_X)$.

**Définition 3.2** (Propriétés d'un H-espace)

(*i*) *Associativité*
*Un H-espace* $(H, h_0)$ *est dit* associatif à homotopie près *si*

$$m \circ (m \times \mathrm{Id}_H) \simeq_* m \circ (\mathrm{Id}_H \times m),$$

*c'est-à-dire si le diagramme suivant commute à homotopie près :*

$$\begin{tikzcd} H \times H \times H \arrow[r, "m \times \mathrm{Id}_H"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_H \times m"] & H \times H \arrow[d, "m"] \\ H \times H \arrow[r, "m"] & H. \end{tikzcd}$$

Diagramme 9: Associativité de la multiplication

(*ii*) *Inverse*
*Pour un H-espace* $(H, h_0)$*, une application continue* $c : H \to H$ *est un* inverse homotopique *si*

$$m \circ (c, \mathrm{Id}_H) \simeq_* c_{h_0} \simeq_* m \circ (\mathrm{Id}_H, c),$$

*c'est-à-dire si le diagramme suivant commute à homotopie près :*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "{(c,\mathrm{Id}_H)}"] \arrow[dr, "c_{h_0}"'] & H \times H \arrow[d, "m"] & H \arrow[l, "{(\mathrm{Id}_H,c)}"'] \arrow[dl, "c_{h_0}"] \\ & H, & \end{tikzcd}$$

Diagramme 10: Inverse homotopique

où

$$(c, Id_H)(h) = (c(h), h) \quad \text{et} \quad (Id_H, c)(h) = (h, c(h)), \quad \forall h \in H.$$

(*iii*) *Commutativité*
*Un H-espace est dit* commutatif à homotopie près *si*

$$m \circ T \simeq_* m,$$

*où*

$$\begin{array}{rccc} T : & H \times H & \longrightarrow & H \times H \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, x), \end{array}$$

*c'est-à-dire si le diagramme suivant commute à homotopie près :*

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "m"'] & & H \times H \arrow[dl, "m"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

Diagramme 11: Commutativité de la multiplication

**Définition 3.3** (H-groupe)
*Un* H-groupe *est un H-espace, muni d'une loi de multiplication continue et associative à homotopie près, ainsi que d'un inverse homotopique.*

**Définition 3.4** (H-application)
*Soient* $(X, x_0)$, $(Y, y_0)$ *des H-espaces. Une* H-application *est une application continue pointée* $f : X \to Y$ *qui vérifie* $m_Y \circ (f \times f) \simeq_* f \circ m_X$.

En d'autres mots, on peut également voir une H-application comme une application continue pointée de $X$ vers $Y$ qui fait commuter, à homotopie près, le diagramme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "m_X"] & Y \times Y \arrow[d, "m_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Diagramme 12: H-application

**Notation 3.5**
Si $(X, x_0)$ et $(Y, y_0)$ sont des espaces pointés, alors on note $[X, x_0; Y, y_0]$ l'ensemble des classes d'équivalence des applications pointées de $(X, x_0)$ vers $(Y, y_0)$ sous la relation $\simeq_*$.

**Définition 3.6** (Application diagonale)
L'application diagonale *est l'application définie, pour tout $x \in X$, par*

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & X & \longrightarrow & X \times X \\ & x & \longmapsto & (x, x). \end{array}$$

**Proposition 3.7**
*Soit $(K, k_0)$ un H-groupe muni d'une multiplication $m$ et d'un inverse homotopique $c$. Alors pour tout espace topologique pointé $(X, x_0)$, on peut munir $[X, x_0; K, k_0]$ d'une structure de groupe, en définissant le produit par la classe d'homotopie de la composition*

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} K \times K \xrightarrow{m} K,$$

*autrement dit,*

$$[f] \cdot [g] := [m \circ (f \times g) \circ \Delta],$$

*pour tous $f, g : (X, x_0) \to (K, k_0)$ continues. L'identité du groupe est donnée par la classe de l'application constante $[c_{k_0}]$ et l'inverse est donnée par $[f]^{-1} := [c \circ f]$.*
*Si $m$ est commutative, alors $[X, x_0; K, k_0]$ est un groupe commutatif.*
*De plus, toute application continue $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induit un homomorphisme de groupes*

$$\begin{array}{rccc} f^* : & [Y, y_0; K, k_0] & \longrightarrow & [(X, x_0); (K, k_0)] \\ & [g] & \longmapsto & [g \circ f], \end{array}$$

*pour tout $g : (Y, y_0) \to (K, k_0)$.*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que le produit est bien défini. Soient $f' \in [f]$ et $g' \in [g]$. Alors il existe une homotopie $H : X \times I \to K$ entre $f'$ et $f$ et il existe une homotopie $G : X \times I \to K$ entre $g'$ et $g$. On définit l'application

$$\begin{array}{rccc} M : & X \times I & \longrightarrow & K \\ & (x, t) & \longmapsto & m \circ (H(x, t), G(x, t)), \end{array}$$

qui est continue par composition d'applications continues.
Alors on a pour tout $x \in X$

$$M(x, 0) = m \circ (H(x, 0), G(x, 0)) = m \circ (f, g) = m \circ (f \times g) \circ \Delta$$

et

$$M(x, 1) = m \circ (H(x, 1), G(x, 1)) = m \circ (f', g') = m \circ (f' \times g') \circ \Delta.$$

L'application $M$ définit donc une homotopie de $[f] \cdot [g]$ vers $[f'] \cdot [g']$.

Montrons l'associativité du produit défini sur $[X, x_0; K, k_0]$ :

$$\begin{aligned}
[f]\cdot([g]\cdot[h]) &= [m\circ(f\times([g]\cdot[h]))\circ\Delta] \\
&= [m\circ(f\times(m\circ(g\cdot h)\circ\Delta))\circ\Delta] \\
&= [m\circ(\mathrm{Id}_X\times m)\circ(f\times(g\times h))\circ(\mathrm{Id}_X\times\Delta)\circ\Delta] \\
&\overset{(1)}{=} [m\circ(m\times\mathrm{Id}_X)\circ((f\times g)\times h)\circ(\Delta\times\mathrm{Id}_X)\circ\Delta] \\
&= [m\circ((m\circ(f\times g)\circ\Delta)\times h)\circ\Delta] \\
&= ([f]\cdot[g])\cdot[h],
\end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété (i) de la Définition 3.2 pour l'égalité (1).
Montrons ensuite que l'identité du produit est bien définie :

$$\begin{aligned}
[c_{k_0}]\cdot[f] &= [m\circ(c_{k_0}\times f)\circ\Delta] \\
&= [m\circ(c_{k_0},\mathrm{Id}_K)\circ f] \\
&= [\mathrm{Id}_K\circ f] \\
&= [f],
\end{aligned}$$

où on a utilisé que le carré du Diagramme 13 commute strictement et que le triangle commute à homotopie près. Ceci découle de la Définition 3.1.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "f"'] & X\times X \arrow[d, "c_{k_0}\times f"] \\
K \arrow[r, "(k_0,\mathrm{Id}_K)"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_K"'] & K\times K \arrow[d, "m"] \\
 & K.
\end{tikzcd}$$

Diagramme 13: Identité du produit

De même, on peut montrer que $[f]\cdot[c_{k_0}] = [f]$.
Enfin, montrons que l'inverse du produit est bien défini.

$$\begin{aligned}
[f]^{-1}\cdot[f] &= [c\circ f]\cdot[f] \\
&= [m\circ(c\circ f\times f)\circ\Delta] \\
&= [m\circ(Id_K, c)\circ f] \\
&\overset{(2)}{=} [c_{k_0}\circ f] \\
&= [c_{k_0}],
\end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété (ii) de la Définition 3.2 pour l'égalité (2).
Autrement dit, on a utilisé que dans le diagramme suivant le carré commute strictement et le triangle commute à homotopie près, par la Définition 3.2 :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "f"'] & X \times X \arrow[d, "(c\circ f)\times f"] \\
K \arrow[r, "(\mathrm{Id}_K, c)"] \arrow[dr, "c_{k_0}"'] & K \times K \arrow[d, "m"] \\
& K.
\end{tikzcd}$$

Diagramme 14: Inverse du produit

On montre de même que $[f] \cdot [f]^{-1} \simeq_* c_{k_0}$. Ainsi, on a bien défini une structure de groupe sur $[X, x_0; K, k_0]$.
Supposons maintenant que $m$ est commutative. Alors on a

$$\begin{aligned}
[f] \cdot [g] &= [m \circ (f \times g) \circ \Delta] \\
&= [m \circ (f, g)] \\
&\overset{(3)}{=} [m \circ (g, f)] \\
&= [m \circ (g \times f) \circ \Delta] \\
&= [g] \cdot [f],
\end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété (iii) de la Définition 3.2 pour l'égalité (3). Le produit sur $[X, x_0; K, k_0]$ est donc aussi commutatif.
Soit $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Montrons que l'application $f^*$ est bien définie et est un homomorphisme de groupe.
Soit $g' \in [g]$. Alors il existe une homotopie $H : Y \times I \to K$ entre $g$ et $g'$. On pose

$$\begin{array}{rccc}
H' : & X \times I & \longrightarrow & K \\
& (s,t) & \longmapsto & H(f(s), t).
\end{array}$$

Alors $H'$ est une application continue par composition d'applications continues. De plus, pour tout $s \in I$,

$$H'(s, 0) = H(f(s), 0) = g(f(s))$$

et

$$H'(s, 1) = H(f(s), 1) = g'(f(s)).$$

Ainsi, $H'$ définit une homotopie de $g \circ f$ vers $g' \circ f$ et donc $f^*$ est bien définie sur les classes d'homotopie.
Montrons maintenant que $f^*([g]\cdot[h]) = f^*([g])\cdot f^*([h])$ pour tous $[g], [h] \in [Y, y_0; K, k_0]$.

$$\begin{aligned}
f^*([g]) \cdot f^*([h]) &= [g \circ f] \cdot [h \circ f] \\
&= [m \circ ((g \circ f) \times (h \circ f)) \circ \Delta] \\
&\overset{(4)}{=} [m \circ (g \times h), (f \times f) \circ \Delta] \\
&\overset{(5)}{=} [m \circ (g \times h) \circ \Delta \circ f] \\
&= f^*([m \circ (g \times h) \circ \Delta]) \\
&= f^*([g] \cdot [h]),
\end{aligned}$$

où l'égalité (4) vient du fait que le triangle du diagramme ci-dessous commute et l'égalité (5) découle de la commutativité stricte du carré :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "f"] & X \times X \arrow[r, "(g\circ f)\times(h\circ f)"] \arrow[d, "f\times f"] & K \times K \arrow[r, "m"] & K. \\
Y \arrow[r, "\Delta"'] & Y \times Y \arrow[ur, "g\times h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Diagramme 15: Homomorphisme $f^*$

Ainsi, $f^*$ est bien un homomorphisme de groupes. $\square$

## 3.2 Co-H-espace

**Notation 3.8**
Soient $(X, x_0)$, $(Y, y_0)$ des espaces topologiques pointés. On définit le *wedge* de $X$ et $Y$ comme l'espace pointé

$$(X \vee Y, *) := \big((X, x_0) \sqcup (Y, y_0)\big)/_{x_0 \sim y_0} = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y,$$

où le point de base $*$ est donné par la classe de $x_0 \sim y_0$.

**Définition 3.9** (Co-H-espace)
*Soit $x_0 \in X$. Un* co-H-espace *est un espace topologique pointé $(X, x_0)$ muni d'une application continue de comultiplication $m' : X \to X \vee X$ telle que $i'_1 \circ m' \simeq_* \mathrm{Id}_X \simeq_* i'_2 \circ m'$, où*

$$\begin{array}{rccc} i'_1 : & X \vee X & \longrightarrow & X \\ & (x, x_0) & \longmapsto & x \end{array},$$

*c'est-à-dire, le premier sommand de $X \vee X$ est envoyé sur $x$ par $i'_1$ et*

$$\begin{array}{rccc} i'_2 : & X \vee X & \longrightarrow & X \\ & (x_0, x) & \longmapsto & x \end{array},$$

*c'est-à-dire, le deuxième sommand de $X \vee X$ est envoyé sur $x$ par $i'_2$. Autrement dit, le diagramme suivant commute à homotopie près :*

$$\begin{tikzcd}
X & X \vee X \arrow[l, "i'_1"'] \arrow[r, "i'_2"] & X \\
& X. \arrow[ul, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[u, "m'"] \arrow[ur, "\mathrm{Id}_X"'] &
\end{tikzcd}$$

Diagramme 16: Comultiplication

**Définition 3.10** (Propriétés d'un co-H-espace)

$(i)$ *Associativité*
*Un co-H-espace $(H, h_0)$ est dit* associatif à homotopie près *si*

$$(m' \vee \mathrm{Id}_H) \circ m' \simeq_* (\mathrm{Id}_H \vee m') \circ m',$$

*c'est-à-dire si le diagramme suivant commute à homotopie près :*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "m'"] & H \vee H \arrow[d, "m' \vee \mathrm{Id}_H"] \\ H \vee H \arrow[r, "\mathrm{Id}_H \vee m'"] & H \vee H \vee H. \end{tikzcd}$$

Diagramme 17: Associativité de la comultiplication

(*ii*) *Inverse*
*Pour un co-H-espace* $(H, h_0)$*, une application continue* $c' : H \to H$ *est un* inverse homotopique *si*

$$(c', \mathrm{Id}_H) \circ m' \simeq_* c_{h_0} \simeq_* (\mathrm{Id}_H, c') \circ m',$$

*c'est-à-dire si le diagramme suivant commute à homotopie près :*

$$\begin{tikzcd} H & H \vee H \arrow[l, "(\mathrm{Id}_H, c')"'] \arrow[r, "(c', \mathrm{Id}_H)"] & H \\ & H. \arrow[ul, "c_{h_0}"] \arrow[u, "m'"] \arrow[ur, "c_{h_0}"'] & \end{tikzcd}$$

Diagramme 18: Inverse homotopique

(*iii*) *Commutativité*
*Un co-H-espace est dit* commutatif à homotopie près *si*

$$T' \circ m' \simeq_* m',$$

*où*

$$\begin{array}{rccc} T' : & H \vee H & \longrightarrow & H \vee H \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array},$$

*c'est-à-dire si le diagramme suivant commute à homotopie près :*

$$\begin{tikzcd} H \vee H \arrow[rr, "T'"] & & H \vee H \\ & H. \arrow[ul, "m'"] \arrow[ur, "m'"'] & \end{tikzcd}$$

Diagramme 19: Commutativité de la comultiplication

**Définition 3.11** (Co-H-groupe)
*Un* co-H-groupe *est un co-H-espace, associatif à homotopie près et muni d'un inverse homotopique.*

**Remarque 3.12**
La notion de co-H-application se définit de manière duale à celle de H-application, voir Définition 3.4.

**Définition 3.13**
*On définit l'*application pliage *par*

$$\begin{array}{rccc} \Delta' : & X \vee X & \longrightarrow & X \\ & \begin{cases} (x, x_0) \\ (x_0, x) \end{cases} & \longmapsto & x \end{array}$$

**Proposition 3.14**
*Soit $(K, k_0)$ un co-H-groupe muni de la comultiplication $m'$ et de l'inverse homotopique $c'$. On peut alors munir $[(K, k_0); (X, x_0)]$ d'une structure de groupe, pour tout espace topologique pointé $(X, x_0)$, en définissant le produit par la classe d'homotopie de la composition*

$$K \xrightarrow{m'} K \vee K \xrightarrow{f \vee g} X \vee X \xrightarrow{\Delta'} X$$

*autrement dit,*

$$[f] \cdot [g] := \left[\Delta' \circ (f \vee g) \circ m'\right],$$

*pour tous $f, g : (K, k_0) \to (X, x_0)$ continues. L'identité du groupe est donnée par la classe de l'application constante $[c_{k_0}]$ et l'inverse est donnée par $[f]^{-1} = [f \circ c']$.*
*Si $m'$ est commutative, alors $[K, k_0; X, x_0]$ est un groupe commutatif.*
*De plus, toute application continue $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induit un homomorphisme*

$$\begin{array}{rrcl} f_* : & [K, k_0; X, x_0] & \longrightarrow & [(K, k_0); (Y, y_0)] \\ & [g] & \longmapsto & [g \circ f], \end{array}$$

*pour tout $g : (K, k_0) \to (X, x_0)$.*

*Démonstration.* En remarquant que la définition d'un co-H-espace est duale à celle d'un H-espace, en remplaçant $H \times H$ par $H \vee H$ et en inversant le sens des flèches, la preuve de cette proposition se fait de manière duale à celle de la Proposition 3.7. $\square$

## 3.3 Egalité des opérations de multiplication et de comultiplication

Le but de cette section est de montrer que, sous certaines conditions, l'opération de mutliplication et l'opération de comultiplication sur les classes d'homotopie coïncident. On va également montrer que, dans ce cas, la structure de groupe résultante sur les classes d'homotopie est commutative. Pour montrer cela, nous avons besoin de la proposition ci-après. Remarquons que cette proposition se fait dans un cadre ensembliste totalement général.

**Proposition 3.15**
*Soit $X$ un ensemble avec deux lois de multiplication $\circ$ et $*$. Si les propriétés suivantes sont satisfaites*

*(i) l'ensemble $X$ possède un élément neutre $e$ tel que, pour tout $x \in X$,*

$$x \circ e = x * e = e * x = e \circ x;$$

*(ii) pour tous $x, x', y, y' \in X$, on a*

$$(x \circ x') * (y \circ y') = (x * y) \circ (x' * y'),$$

*alors $\circ$ et $*$ coïncident. De plus, les deux lois sont commutatives et associatives.*

*Démonstration.* Soient $x, y, z \in X$. On obtient pour commencer que

$$x \circ y = (x * e) \circ (e * y) = (x \circ e) * (e \circ y) = x * y,$$

et donc que $*$ et $\circ$ coïncident. On déduit que

$$x \circ y = (e * x) \circ (y * e) = y * x = y \circ x,$$

ce qui signifie que $*$ et $\circ$ sont commutatives. Enfin, on a

$$x \circ (y \circ z) = (x * e) \circ (y * z) = (x \circ y) * (e \circ z) = (x \circ y) \circ z,$$

ce qui implique que $*$ et $\circ$ sont associatives. □

**Théorème 3.16**
*Soient $(X, x_0)$ un co-H-groupe et $(Y, y_0)$ un H-groupe. Alors l'opération de groupe sur $[X, x_0; Y, y_0]$, induite par la co-H-structure de $(X, x_0)$, coïncide avec l'opération de groupe induite par la H-structure de $(Y, y_0)$.*
*De plus, la structure de groupe résultante sur $[X, x_0; Y, y_0]$ est commutative.*

*Idée de la démonstration.* Pour montrer que les opérations de multiplication et de comultiplication coïncident sur les classes d'homotopie, il suffit de montrer qu'elles satisfont les propriétés (i) et (ii) de la Proposition 3.15. Par les Propositions 3.7 et 3.14, on a que la classe $[c_{y_0}]$ de l'application constante est l'élément neutre, pour la multiplication et la comultiplication, c'est-à-dire qu'elle satisfait (i) de la Proposition 3.15. Notons par $\circ$ l'opération de comultiplication de $Y$ et par $*$ l'opération de multiplication de $X$. Il nous reste à montrer que, pour tous $f, f', g, g' : (X, x_0) \to (Y, y_0)$,

$$(f \circ f') * (g \circ g') = (f * g) \circ (f' * g').$$

La démonstration consiste à montrer que le Diagramme 20 commute à homotopie près. On remarque que le membre de gauche de l'égalité ci-dessus correspond à la composée supérieure du diagramme et le membre de droite à la composée inférieure. On montre séparemment que les parties (1) à (6) commutent à homotopie près, ce qui implique la commutativité du diagramme complet.

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, "m' \times m'"] & (X \vee X) \times (X \vee X) \arrow[r, "{(f\vee f')\times (g\vee g')}"] & (Y \vee Y) \times (Y \vee Y) \arrow[r, "\Delta' \times \Delta'"] & Y \times Y \arrow[dd, "m"] \\
\Delta(X) \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "(1)"] & {\begin{matrix}(X \times x_0 \times X \times x_0) \\ \cup\, (x_0 \times X \times x_0 \times X)\end{matrix}} \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[dd, "1\times T\times 1"] \arrow[ur, phantom, "(2)"] & {\begin{matrix}Y \times y_0 \times Y \times y_0 \\ \cup\, y_0 \times Y \times y_0 \times Y\end{matrix}} \arrow[u, hook] \arrow[ur] \arrow[dd, "1\times T\times 1"] \arrow[ur, phantom, "(3)"] & \\
X \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "m'"'] & & & Y \\
X \vee X \arrow[r, "\Delta\vee\Delta"'] \arrow[uur, phantom, "(4)"] & (X \times X) \vee (X \times X) \arrow[r, "{(f\times f')\vee (g\times g')}"'] \arrow[uur, phantom, "(5)"] & (Y \times Y) \vee (Y \times Y) \arrow[r, "m\vee m"'] \arrow[uur, phantom, "(6)"] & Y \vee Y \arrow[u, "\Delta'"']
\end{tikzcd}$$

Diagramme 20: Egalité des opérations de multiplication et de comultiplication

□

# 4 Applications des notions étudiées

Dans cette partie, nous allons voir les exemples principaux de H-espace et de co-H-espace, qui sont l'espace des lacets et la suspension réduite d'un espace topologique pointé. Pour les définitions de ces espaces importants, nous nous sommes inspirées à la fois de [Swi75] et de [Die08].

Nous introduisons ensuite la notion de groupes supérieurs d'homotopie $\pi_n(X, x_0)$ et, par les résultats vus précedemment, nous allons montrer que ces groupes sont abéliens pour $n \geq 2$.

La preuve de ce résultat final repose sur le fait que l'espace des lacets et la suspension d'un espace topologique sont, respectivement, un H-groupe et un co-H-groupe. Néanmoins, cette vérification n'est pas triviale et requiert quelques prérequis topologiques que nous introduisons ici. Pour ce faire, nous suivons la démarche de [Rot88].

## 4.1 Prérequis topologiques

**Définition 4.1** (Espace de Hausdorff)
*Un* espace de Hausdorff *$X$ est un espace topologique tel que, pour tous $a$, $b \in X$, il existe des ouverts $U$, $V \in X$ tels que $a \in U$, $b \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.*

**Définition 4.2** (Topologie compact-ouvert)
*Soient $X$, $Y$ des espaces topologiques et $X^Y$ l'ensemble des fonctions continues de $Y$ dans $X$. La* topologie compact-ouvert *sur $X^Y$ est la topologie qui admet la sous-base constituée de tous les sous-ensembles $(K;U)$, où $K$ est un compact de $Y$ et $U$ est un ouvert de $X$. On a donc*

$$(K;U) = \{f \in X^Y : f(K) \subset U\}.$$

**Notation 4.3**
Soient $X$, $Y$ et $Z$ des ensembles et soit $F : Z \times Y \to X$ une fonction à deux variables. Pour un $z \in Z$ fixé, on note $F_z : Y \to X$ la fonction définie par $F_z(y) = F(z, y)$. En notant $\mathrm{Hom}(Y, X)$ l'ensemble des fonctions de $Y$ dans $X$, on peut définir la fonction

$$\begin{array}{rccc} F^\sharp : & Z & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Y,X) \\ & z & \longmapsto & F_z \end{array}, \quad \forall z \in Z.$$

**Définition 4.4** (Fonction associée)
*Soit la fonction $F : Z \times Y \to X$. On définit l'*associée *de $F$ par la fonction $F^\sharp$ ci-dessus.*

**Définition 4.5** (Application d'évaluation)
*Soient $X$ et $Y$ des ensembles. On définit l'*application d'évaluation *par*

$$\begin{array}{rccc} e : & \mathrm{Hom}(Y,X) \times Y & \longrightarrow & X \\ & (f, y) & \longmapsto & f(y), \end{array}$$

*pour tout $y \in Y$ et pour tout $f \in \mathrm{Hom}(Y, X)$.*

**Théorème 4.6**
*Soient $X$ et $Z$ des espaces topologiques et soit $Y$ un espace de Hausdorff localement compact. En munissant $X^Y$ de la topologie compact-ouvert, on a les résultats suivants :*

(*i*) *L'application d'évaluation* $e : X^Y \times Y \to X$ *est continue ;*

(*ii*) *Une fonction* $F : Z \times Y \to X$ *est continue si et seulement si son associée* $F^\sharp : Z \to X^Y$ *est continue.*

*Démonstration.* Nous admettons ici ce résultat. Le lecteur peut trouver les détails de cette preuve dans [Rot88], Théorème 11.1, p.313. □

**Corollaire 4.7**
*Soient des espaces* $X$ *et* $Z$ *et soit* $Y$ *un espace localement Hausdorff. Une fonction* $g : Z \to X^Y$ *est continue si et seulement si la composition* $e \circ (g \times 1)$ *est continue.*

*Démonstration.* Si l'on nomme $F$ la composition $e \circ (g \times 1)$, alors on remarque que $g$ est l'associée de $F$. Par le théorème précédent, $g = F^\sharp$ est continue si et seulement si $F$ est continue. Ainsi, $e \circ (g \times 1)$ est continue si et seulement si $g$ est continue. □

Ce corollaire revient à dire que le diagramme suivant d'applications continues commute :

$$\begin{tikzcd} Z \times Y \arrow[r, "F^\sharp \times 1"] \arrow[dr, "F"'] & X^Y \times Y \arrow[d, "e"] \\ & X. \end{tikzcd}$$

Diagramme 21: Corollaire 4.7

## 4.2 Espace des lacets

**Définition 4.8** (Espace des lacets)
*L'*espace des lacets $\Omega X$ *d'un espace topologique pointé* $(X, x_0)$ *est un sous-ensemble des chemins de* $X$ *défini par*

$$\Omega X = \{w : [0,1] \to X \mid w(0) = w(1) = x_0\}.$$

*Autrement dit,* $\Omega X$ *est l'ensemble des lacets basés en* $x_0$*.*

**Remarque 4.9**
On peut munir $\Omega X$ d'un point de base $c_{x_0}$, donné par le lacet constant en $x_0$.

**Proposition 4.10**
$(\Omega X, c_{x_0})$ *est un H-groupe.*

**Remarque 4.11**
Pour faire la preuve, nous avons besoin du principe de recollement :
Soient $E, E', F, F'$ des espaces topologiques tels que $E \cap E' = \emptyset$ et $F \cap F' = \emptyset$ et soient deux applications $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$. On définit

$$\begin{array}{rccl} h : & E \cup E' & \longrightarrow & F \cup F' \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E, \\ g(x) & \text{si } x \in E'. \end{cases} \end{array}$$

Alors $h$ est continue si et seulement si $f$ et $h$ sont continue et $f(1/2) = g(1/2)$.

*Démonstration de la Proposition 4.10.* On va utiliser la notation $\mathrm{Id}_{\Omega X} = 1$. On munit $(\Omega X, c_{x_0})$ de l'opération de mutliplication $m$ donnée par

$$\begin{array}{rrcl} m: & \Omega X \times \Omega X & \longrightarrow & \Omega X \\ & (w, w') & \longmapsto & w \star w', \end{array}$$

où $\star$ est l'opération de concaténation des chemins de la Définition 2.13.
On commence par montrer que $m$ est continue.
Pour cela, on considère la composition

$$\Omega X \times \Omega X \times [0,1] \xrightarrow{m \times 1} \Omega X \times [0,1] \xrightarrow{e} X,$$

où $e$ est l'application d'évaluation de la Définition 4.5. On regarde maintenant cette même composition sur $\Omega X \times \Omega X \times [0, 1/2]$ et on obtient

$$\Omega X \times \Omega X \times [0,1/2] \xrightarrow{p_1 \times q} \Omega X \times [0,1] \xrightarrow{e} X,$$

où $p_1$ dénote la première projection et $q$ est la fonction continue $q(t) = 2t$, pour tout $t \in [0, 1/2]$. On sait, par le cours de topologie [Buf09], que $p_1$ est continue. De plus, comme $q$ est continue, on a que $e \circ (p_1 \times q)$ est continue. Or, $e \circ (p_1 \times q)$ et $e \circ (m \times 1)$ coïncident sur $\Omega X \times \Omega X \times [0, 1/2]$. On obtient ainsi la continuité de $e \circ (m \times 1)$ et, par le Corollaire 4.7, on conclut que $m$ est continue sur $\Omega X \times \Omega X \times [0, 1/2]$. On montre de manière similaire la continuité de $m$ sur $\Omega X \times \Omega X \times [1/2, 1]$. Ainsi, en calculant la valeur de $m$ sur $\Omega X \times \Omega X \times \{1/2\}$, on conclut par le principe de recollement que $m$ est continue.

On va maintenant montrer que $m$ est associative.
Soient $w, w', w'' \in \Omega X$. On a alors

$$\left((w \star w') \star w''\right)(t) = \begin{cases} w(4t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/4, \\ w'(4t-1) & \text{si } 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ w''(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

et

$$\left(w \star (w' \star w'')\right)(t) = \begin{cases} w(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ w'(4t-2) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ w''(4t-3) & \text{si } 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

On cherche une homotopie $H : \Omega X \times \Omega X \times \Omega X \times [0,1] \to \Omega X$ de $((w \star w') \star w'')(t)$ vers $(w \star (w' \star w''))(t)$ telle que $H = F^\sharp$, pour une application $F$. Définissons $F : \Omega X \times \Omega X \times \Omega X \times I \times I \to X$ par

$$F(w, w', w'', s, t) = \begin{cases} w\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}, \\ w'(4t - s - 1) & \text{si } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}, \\ w''\left(\frac{4t-2-s}{2-s}\right) & \text{si } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Par le principe de recollement, $F$ est continue et donc, par le Théorème 4.6, $H$ est continue. Par ailleurs, on remarque que l'on a $F(w, w', w'', 0, t) = ((w \star w') \star w'')(t)$ et $F(w, w', w'', 1, t) = (w \star (w' \star w''))(t)$. De plus, on a

$$F(w, w', w'', s, 0) = w(0) = x_0$$

et

$$F(w, w', w'', s, 1) = w''(1) = x_0.$$

Ainsi, l'image de H est bien contenue dans $\Omega X$. On en conclut que $H$ est bien l'homotopie cherchée et donc que $m$ est associative à homotopie près.

On montre maintenant que $m$ possède un inverse homotopique.
Soit $c_{x_0}$ le lacet constant en $x_0$. Ce lacet est le point de base de $\Omega X$. On définit les applications $m \circ i_1$ et $m \circ i_2$ par

$$m \circ i_1(w) = w \star c_{x_0}$$

et

$$m \circ i_2(w) = c_{x_0} \star w,$$

où $i_1$ et $i_2$ sont définis comme dans la Définition 3.1.
On cherche une homotopie de $m \circ i_1$ vers 1. Définissons la fonction

$$\begin{array}{rrcl} H: & \Omega X \times [0,1] & \longrightarrow & \Omega X \\ & (w,t) & \longmapsto & \bar{w}_t, \end{array}$$

où $\bar{w}_t$ est donnée par

$$\bar{w}_t(s) = \begin{cases} w\left(\frac{2s}{t+1}\right) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{t+1}{2}, \\ x_0 & \text{si } \frac{t+1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

De la même manière que précédemment, comme $e \circ (H \times 1) = \bar{w}_t(s)$ est continue, on a par le Corollaire 4.7 que $H$ est continue. Comme $\bar{w}_t(0) = w(0) = x_0$ et $\bar{w}_t(1) = x_0$, l'image de $\bar{w}_t$ est bien contenue dans $\Omega X$. Enfin, on a $H_0(w) = w \star c_{x_0}$ et $H_1(w) = w$, ce qui implique que $m \circ i_1 \simeq_* 1$. On montre de la même manière que $m \circ i_2 \simeq_* 1$.

Il nous reste à montrer que $m$ possède un inverse.
On définit l'application qui envoie un chemin sur son inverse par

$$\begin{array}{rrcl} \eta: & \Omega X & \longrightarrow & \Omega X \\ & w(t) & \longmapsto & \eta(w), \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rrcl} \eta(w): & I & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & \eta(w)(t) = w(1-t), \end{array}$$

pour tout $t \in [0,1]$. On définit encore $K : \Omega X \times [0,1] \times [0,1] \to X$ par

$$K(w,s,t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2}, \\ w(2t-s) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ w(2-2t-s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2-s}{2}, \\ x_0 & \text{si } \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Comme précédemment, on remarque que l'homotopie cherchée $H : \Omega X \times [0,1] \to \Omega X$ est en fait $K^\sharp$. Comme $K$ est continue par le principe de recollement, la continuité de $H$ découle du Théorème 4.6 et du Corollaire 4.7. De plus, on a $K(w, 0, t) = (w \star \eta(w))(t)$ et $K(w, 1, t) = c_{x_0}$. De plus, puisque $K(w, s, 0) = x_0 = K(w, s, 1)$, l'image de $H$ est bien dans $\Omega X$. On obtient que $w \star \eta(w) \simeq_\star c_{x_0}$. On montre de la même manière que $\eta(w) \star w \simeq_\star c_{x_0}$. Finalement, on constate que $(\Omega X, c_{x_0})$ est un H-groupe. □

## 4.3 Suspension d'un espace topologique

**Définition 4.12** (Suspension réduite)
*Soit* $(X, x_0)$ *un espace topologique pointé. On définit la* suspension réduite *de* $X$ *comme l'espace topologique quotient*

$$\Sigma X = X \times I/_{(X \times \{0,1\}) \cup (\{x_0\} \times I)} = X \times I/_{X \vee I}.$$

*Le point de base* $*$ *de* $\Sigma X$ *est la classe d'équivalence* $[x_0, t]$.

Intuitivement, cet espace quotient est construit de la manière suivante. On considère le cylindre $X \times I$ et on le quotiente d'abord par $X \times \{0, 1\}$. Ceci revient à pincer le haut et le bas du cylindre de manière à obtenir un double cône d'extrêmités $x_0$. Quotienter ensuite par $\{x_0\} \times I$ identifie le point de base $x_0$ sur la hauteur du cône.

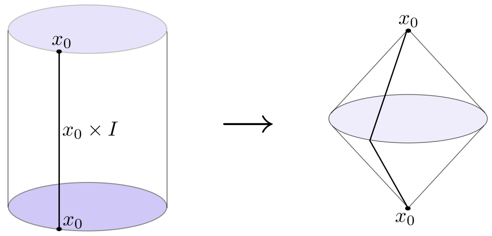


Figure 22: Suspension réduite de $X$

**Proposition 4.13**
$(\Sigma X, *)$ *est un co-H-groupe.*

*Démonstration.* On ne présente pas la preuve de ce résultat car elle demande l'introduction de notions catégoriques qui dépassent le cadre de ce travail. On trouve la preuve détaillée de cette proposition dans [Rot88], Corollaire 11.13, p.331-332. □

## 4.4 Groupes d'homotopie supérieurs

La définition suivante constituant un élément clé de notre travail, nous avons décidé de la donner de deux manières équivalentes. La première manière est la plus intuitive. En effet, en la comparant avec la Définition 2.19, on ne fait que remplacer $I$ par $I^n$. Néanmoins, la deuxième manière est la plus courante, et nous allons utiliser celle-là pour montrer les différents résultats. Pour ces définitions, nous nous en sommes remises à [WIK10].

**Définition 4.14** (Groupes d'homotopie supérieurs)
*Soit* $(X, x_0)$ *un espace topologique pointé. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on définit le* n-ième groupe d'homotopie $\pi_n(X, x_0)$ *comme étant l'ensemble des classes d'homotopie des applications continues* $g : I^n \to X$ *telles que le bord de* $I^n$ *est envoyé sur* $x_0$.
*De manière équivalente, puisque* $S^n \simeq I^n/\partial I^n$, *on définit le* n-ième groupe d'homotopie $\pi_n(X, x_0)$ *comme étant l'ensemble des classes d'homotopie des applications continues pointées* $g : (S^n, s_0) \to (X, x_0)$, *où* $s_0$ *dénote le point de base de la sphère unité* $S^n$ *de dimension n.*
*En résumé, pour tout espace topologique pointé* $(X, x_0)$, *on définit*

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n, s_0; X, x_0].$$

Afin de montrer la commutativité des groupes d'homotopie supérieurs, nous avons besoin de la proposition suivante.

**Proposition 4.15**
*Pour toute paire d'espaces topologiques pointés $(X, x_0)$ et $(Y, y_0)$, il existe une bijection naturelle d'ensembles d'applications continues*

$$\{f : \Sigma(X) \to Y\} \overset{\cong}{\leftrightarrow} \{g : X \to \Omega(Y)\}.$$

**Remarque 4.16**
Il est possible de montrer que cette bijection d'ensembles induit une bijection sur les classes d'homotopies pointées :

$$[\Sigma(X), Y]_* \cong [X, \Omega(Y)]_*.$$

**Remarque 4.17**
On peut montrer que $S^n$ est homéomorphe à $\Sigma S^{n-1}$ (voir, par exemple, le Lemme 2.27 dans [Swi75]).

**Théorème 4.18**
*Pour tout espace topologique pointé $(X, x_0)$, le groupe $\pi_n(X, x_0)$ est abélien pour $n \geq 2$.*

*Démonstration.* Soit $(X, x_0)$ un espace topologique pointé. Pour alléger la notation, on omet d'écrire les points de base. On a

$$\begin{aligned}
\pi_n(X, x_0) &= [S^n, X] \\
&\overset{(1)}{=} [\Sigma S^{n-1}, X] \\
&\overset{(2)}{=} [S^{n-1}, \Omega X] \\
&\overset{(3)}{=} [\Sigma S^{n-2}, \Omega X],
\end{aligned}$$

où on a utilisé la Remarque 4.17 pour les égalités (1) et (3) et la Remarque 4.16 pour l'égalité (2).
De plus, on sait par la Proposition 4.10 que $\Omega X$ est un H-groupe et, par la Proposition 4.13, que $\Sigma S^{n-2}$ est un co-H-groupe si $n \geq 2$. Donc, par le Théorème 3.16, on conclut que $\pi_n(X, x_0)$ est abélien pour tout $n \geq 2$.

$\square$

# 5 Conclusion

Dans ce mini-projet, nous avons vu, dans un cadre topologique, les deux exemples principaux de H-groupe et de co-H-groupe, qui sont respectivement l'espace des lacets $\Omega X$ et la suspension réduite $\Sigma X$, associés à un espace topologique $X$.

Comme cela a été mentionné auparavant, nous avons choisi de ne pas donner la démonstration de la Proposition 4.13 dans ce travail. La raison principale en est que suivre la preuve élégante proposée par Rotman requiert l'introduction de notions de la théorie des catégories, qui sortent du cadre de ce travail. Le lecteur qui veut connaître cette démonstration peut la trouver dans [Rot88].

Ceci nous amène à nous poser les questions du point de vue et de l'approche adoptée dans ce projet. Cette approche topologique et homotopique n'est certainement pas l'unique manière de traiter ce sujet. En effet, on peut remarquer que si on associe « d'une bonne façon »à tout espace topologique pointé $(X, x_0)$ les espaces pointés $(\Omega X, \omega_0)$ et $(\Sigma X, *)$, alors l'espace des lacets et la suspension réduite définissent deux *foncteurs* sur la catégorie des espaces topologiques pointés. Dans ce nouveau contexte, la bijection naturelle de la Proposition 4.15 signifie exactement que la paire de foncteurs $(\Sigma, \Omega)$ est un exemple d'*adjonction*, concept fondamental en théorie des catégories.

Finalement, le choix adopté ici n'est en aucun cas unique ou préférable à un autre. Nous avons fait ce choix par intérêt partagé pour la topologie. Il serait maintenant intéressant de regarder ce même projet avec les yeux d'un « théoricien des catégories ». Celui-ci pose d'abord le cadre totalement général de la théorie des catégories et développe des concepts abstraits, afin de les appliquer, dans un second temps, à ce contexte précis.

## Références


[Buf09] B. Buffoni – *Topologie*, Cours Bachelor, 2009.

[Die08] T. T. Dieck – *Algebraic topology*, European Mathematical Society, 2008.

[Hes] K. Hess – *Eléments d'homotopie*, Cours Bachelor.

[Rot88] J. Rotman – *An introduction to algebraic topology*, Springer, 1988.

[Sel97] P. Selick – *Introduction to homotopy theory*, Fields Institute Monographs, 1997.

[Swi75] R. Switzer – *Algebraic topology - homotopy and homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 212, Springer, 1975.

[WIK10] « Wikipedia : Homotopy group » – mai 2010, `http://en.wikipedia.org/wiki/Homotopy_group`.