ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Transformée de Fourier-Laplace et applications aux EDO et EDP

vs

Mathématiques - Projet de semestre (été 2008)

Professeur : Philippe Metzener
Étudiants :

Abdelaziz Belqadhi

9 juin 2008

Table des matières

Introduction

Dans ce projet, nous avons étudié deux types de transformations intégrales, la transformée de Fourier et celle de Laplace. Les deux ont de nombreuses applications, et leur particularité est de rendre algébriques des problèmes analytiques (équations différentielles, équations aux dérivées partielles).

Dans un premier temps, nous allons dériver les propriétés de la transformée de Fourier, et énoncer les théorèmes principaux s'y rapportant. La formule d'inversion sera prouvée et nous sera utile pour trouver les solutions d'EDO et d'EDP. Ensuite, nous donnerons quelques applications de celle-ci à des problèmes d'analyse. La solution du problème de la chaleur avec second membre sera donnée. Enfin, deux grands problèmes seront traités, à savoir les problèmes de Stokes dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ et la propagation de flammes dans des tubes fermés.

Pour finir ce projet, nous faisons un parallèle avec la transformée de Laplace, qui jouit de propriétés similaires mais leurs domaines d'application sont différents. Nous allons expliciter la relation entre les deux transformées à l'aide d'une fonction, et souligner un problème ouvert qui est celui de l'inversion de Laplace.

Chapitre 1

Transformée de Fourier

1.1 Définition et exemples de calculs

Nous commencons par définir la norme L^1 d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable au sens de Lebesgue :

$$||f||_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\mu(dx). \tag{1.1}$$

Définition 1.1.1. *Soit f absolument intégrable au sens de Lebesgue, i.e, $f \in L^1(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dénotée $\mathcal{F}(f(x)) = F(k) = \widehat{f}(k)$, $k \in \mathbb{R}$, qu'on définit :*

$$F(k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ikx) f(x) dx.$$

Exemples (a) $f(x) = \exp(-ax^2)$.

$$\begin{aligned} F(k) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ikx - ax^2) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-a\left(x + \frac{ik}{2a}\right)^2 - \frac{k^2}{4a}\right) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp(-ay^2) dy \qquad (1.2) \\ &= (2a)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right). \end{aligned}$$

(1.2) est obtenu par intégration sur un chemin rectangulaire où l'intégrale sur l'axe des réels est égale à l'intégrale décalée sur $x + \frac{ik}{2a}$.

(b) $f(x) = \exp(-a|x|)$.

$$\begin{aligned}
F(k) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ikx - a|x|)dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\int_0^{\infty} \exp(-(a+ik)x)dx + \int_{-\infty}^{0} \exp((a-ik)x)dx \right] \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{a+ik} + \frac{1}{a-ik} \right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}.
\end{aligned}$$

(c) $f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) H\left(1 - \frac{|x|}{a}\right)$, où $H(x) = 1_{(x>0)}$.

$$\begin{aligned}
F(k) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ikx) \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) H\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-a}^{a} \exp(-ikx) \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) dx \\
&= 2(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^a \cos(kx) \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) dx \\
&= 2a(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{\sin(akx)}{ak} dx \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\frac{ak}{2})^2}{\left(\frac{ak}{2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

(d) $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$.

$$\begin{aligned}
F_a(k) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ikx)\chi_{[-a,a]}(x)dx \\
&= 2(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^a \cos(kx)dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ak)}{k}
\end{aligned}$$

Nous nous inspirons du livre d'Analyse vectorielle de Chatterji pour les preuves.

1.2 Propriétés et preuves

(a) Continuité et bornitude
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}(k)$ est continue et bornée. On a aussi :

$$\sup|\widehat{f}| \leq ||f||_1.$$

Preuve :
Soit $g(x,y) = \exp(-ixy)f(x)$.
Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,y)$ est mesurable ; pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto g(x,y)$ est continue pour tout $y \in \mathbb{R}$.

$$|g(x,y)| = |\exp(-ixy)f(x)| \leq |f(x)| \text{ avec } |f| \in L^1(\mathbb{R}).$$

Montrons que pour toute suite (k_n) convergeant vers k, on a

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{f}(k_n) = \widehat{f}(k).$$

On pose : $g_n(x) = g(x,k_n)$. Les hypothèses du théorème de convergence dominée étant vérifiées, on a donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \widehat{f}(k_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} g_(x,k)dx \\
&= \widehat{f}(k).
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{R}$:

$$|\widehat{f}(k)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\exp(-ixk)f(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = ||f||_{L^1}.$$

D'où : $\sup|\widehat{f}| \leq ||f||_1$.
(b) Lemme de Riemann-Lebesgue
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{f}(k) = 0.$$

Preuve :
Soit $g \in C_0^\infty$ avec $g(x) = 0$ si $|x| \geq T$.

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(k) &= \int_{-T}^{T} g(x)\exp(-ikx)dx \\
&= \int_{-T}^{T} g'(x)\frac{\exp(-ikx)}{ik}dx.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$|\widehat{g}(k)| \leq \frac{1}{|k|}||g'(x)||_{L^1}$$

d'où

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{g}(k) = 0.$$

Soit $f \in L^1$. Comme C_0^∞ est dense dans L^1, il existe $g \in C_0^\infty$ tel que :

$$||f-g||_1 < \frac{\epsilon}{2}.$$

On a, de plus :

$$|\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k) \leq ||f-g||_1 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Il existe $R > 0$ tel que $|\widehat{g}(k)| < \frac{\epsilon}{2}$ dès que $|k| > R$. Alors :

$$|\widehat{f}(k)| \leq |\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k)| + |\widehat{g}(k)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ si } |k| > R.$$

D'où : $\lim_{k\to\infty} \widehat{f}(k) = 0$.

(c) Dérivabilité de $\widehat{f}$

Supposons $x \mapsto xf(x)$ intégrable. Alors $\widehat{f}$ est dérivable et $\frac{d}{dk}\widehat{f}(k) = -\widehat{ixf(x)}$.

Preuve :
Nous utiliserons un théorème qui permet la dérivation sous le signe intégrale.
Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que :
(i) $x \mapsto f(x,s)$ est intégrable.
(ii) Pour presque tout x, $s \mapsto f(x,s)$ est dérivable.
(iii) Il existe $g \in L^1(\Omega,\mathbb{R}^+)$ tel que $|\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}| \leq g(x)$.
Alors : $I(s) = \int_\Omega f(x,s)d\mu(x)$ est dérivable et :

$$\frac{dI}{ds} = \int_\Omega \frac{\partial f(x,s)}{\partial s} d\mu(x).$$

Dans notre cas, on considère la fonction $\exp(-ixy)f(x)$. On vérifie facilement que les hypothèses du théorème sont vérifiées. $\widehat{f}$ est donc dérivable et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk}\widehat{f}(k) &= \int \exp(-ixk)f(x)(-ix)dx \\ &= -\widehat{ixf(x)}. \end{aligned}$$

(d) Convolutions

Soient f,$g \in L^1$, on définit la convolution de f et g par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy. \tag{1.3}$$

Notons que cette définition est bien posée par un petit exercice d'application du théorème de Fubini. On a : $f * g \in L^1$ et $||f * g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$.
De plus : $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\widehat{f}\widehat{g}$.

Preuve :

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f * g(y)\exp(-2i\pi xy)dy \\
&= \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \exp(-2i\pi xy)dy \int_{\mathbb{R}} f(y-z)g(z)dz \\
&= \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} \exp(-2i\pi x(y-z))f(y-z)\exp(-2i\pi xz)g(z)dz \\
&= \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \exp(-2i\pi xu)f(u)du \int_{\mathbb{R}} \exp(-2i\pi xz)g(z)dz \\
&= \sqrt{2\pi}\widehat{f}\widehat{g}.
\end{aligned}$$

(e) Règles de calcul

i) $\widehat{f(x-a)} = \exp(-iak)\widehat{f(x)}$.
ii) $\widehat{f(ax)} = \frac{1}{|a|}\widehat{f}(\frac{k}{a})$.
iii) $\widehat{\overline{f(-x)}} = \overline{\widehat{f(x)}}$ si f est à valeurs complexes.
iv $\exp(\widehat{-iax)f(x}) = \widehat{f}(k-a)$.
v) $\widehat{\widehat{f(x)}} = f(-k)$.

Preuves :

(i)

$$\begin{aligned}
\widehat{f(x-a)} &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} \exp(-ikx)f(x-a)dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} \exp(-ik(y+a))f(y)dy \\
&= \exp(-iak)\widehat{f(x)}.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\widehat{f(ax)} &= \int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-ikx)dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a} \exp(-i\frac{k}{a}y) f(y)dy \\
&= \frac{1}{|a|} \widehat{f}(\frac{k}{a}).
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\widehat{\overline{f(-x)}} &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-x)} \exp(-ikx)dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(y)\exp(iky)}dy \\
&= \overline{\widehat{f(x)}}.
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\exp(\widehat{-iax)f}(x) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(i(k-a)x) f(x)dx \\
&= \widehat{f}(k-a).
\end{aligned}$$

(v) On suppose pour l'instant la formule d'inversion vraie :

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(ikx)\widehat{f}(k)dk.$$

En interchangeant x et k :

$$\begin{aligned}
f(k) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(ikx)\widehat{f}(x)dx \\
&\Rightarrow f(-k) = \widehat{\widehat{f(x)}}.
\end{aligned}$$

(f) Formule d'inversion

Si f est définie sur $\mathbb{R}$, est infiniment de fois différentiable, et enfin si $\lim_{x\to\infty} x^N f^{(n)}(x) = 0$ pour tous n, N dans , alors la transformée inverse est donnée par :

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(ikx)\widehat{f}(k)dk.$$

preuve :

$$\begin{aligned}
&\forall \epsilon > 0, \\
\mathcal{F}(\exp(-\epsilon x^2)F(-x)) &= (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \exp(-ikx-\epsilon x^2)\int_{\mathbb{R}} \exp(ixt)f(t)dtdx \\
&= (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(t)dt\int_{\mathbb{R}} \exp(-i(k-t)x-\epsilon x^2)dx \\
&= (4\pi\epsilon)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} f(t)\exp\left(\frac{-(k-t)^2}{4\epsilon}\right)dt \\
\mathcal{F}(\exp(-\epsilon x^2)F(-x)) - f(k) &= (4\pi\epsilon)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} (f(t)-f(k))\exp\left(\frac{-(k-t)^2}{4\epsilon}\right)dt
\end{aligned}$$

car $(4\pi\epsilon)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} \exp(\frac{-(k-t)^2}{4\epsilon})dt = 1$.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}(\exp(-\epsilon x^2)F(-x)) - f(k)| &\leq (4\pi\epsilon)^{-\frac{1}{2}}\max_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|\int_{\mathbb{R}} |t-k|\exp\left(\frac{-(k-t)^2}{4\epsilon}\right)dt \\
&= (4\pi\epsilon)^{-\frac{1}{2}}\max_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|\int_{\mathbb{R}} 4\epsilon|\alpha|\exp(-\alpha^2)d\alpha \to 0 \\
&\quad \text{lorsque } \epsilon \to 0.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
f(k) &= \mathcal{F}(F(-x)) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} \exp(-ikx)F(-x)dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} \exp(ikx)F(x)dx \\
&= (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \exp(ikx)dx\int_{\mathbb{R}} \exp(-ixt)f(t)dt \\
\Rightarrow f(x) &= (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \exp(ikx)dk\int_{\mathbb{R}} \exp(-itk)f(t)dt \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} \exp(ikx)dk(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} \exp(-ikt)f(t)dt \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} \exp(ikx)\widehat{f}(k)dk.
\end{aligned}$$

Nous faisons référence au livre "Integral transforms and applications" de Bhatta pour les applications.

1.3 Applications

1.3.1 Equations différentielles ordinaires

On considère l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre n à coefficients constants : $Ly(x) = f(x)$, où

$$L \equiv a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots a_1 D + a_0.$$

Si on applique la transformée de Fourier, on obtient :

$$[a_n(ik)^n + \dots a_1(ik) + a_0]\,\widehat{y}(k) = \widehat{f}(k)$$
$$\Leftrightarrow P(ik)\widehat{y}(k) = \widehat{f}(k),\; P(z) = \sum_{r=0}^{n} a_r z^r.$$

D'où : $\widehat{y}(k) = \frac{\widehat{f}(k)}{P(ik)} = \widehat{f}(k)Q(k)$. On applique maintenant le théorème de convolution :

$$y(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t)q(x-t)dt$$

avec : $q(x) = \mathcal{F}^{-1}(Q(k))$.

Exemple :
Soit l'équation différentielle :

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + a^2u = f(x)$$

$$\begin{aligned}
(-(ik)^2 + a^2)\widehat{u}(k) &= \widehat{f}(k) \Rightarrow \widehat{u}(k) = \frac{\widehat{f}(k)}{-(k^2+a^2)}.\\
u(x) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{k^2+a^2}\right)(x-y)dy\\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp(-a|x-y|)dy\\
&= \frac{1}{2a}\int_{\mathbb{R}} f(y)\exp(-a|x-y|)dy
\end{aligned}$$

1.3.2 Equations intégrales

(a) Equation intégrale de Fredholm

$$\lambda f(x) + \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt = u(x)$$

où g,u et λ sont connues. En appliquant la transformée de Fourier :

$$\lambda\widehat{f}(k) + (2\pi)^{\frac{1}{2}}\widehat{f}(k)\widehat{g}(k) = \widehat{u}(k)$$

Ceci implique :

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{u}(k)\exp(ikx)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\widehat{g}(k) + \lambda}dk$$

Par exemple, résolvons l'équation intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)f(y)dy = \frac{1}{x^2+a^2}.$$

La transformée donne :

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)\widehat{f}(k) &= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp(-a|k|) \\ &\Rightarrow \widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\exp(-\frac{a}{2}|k|).\end{aligned}$$

L'inversion nous donne la solution :

$$\begin{aligned}f(x) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}(2a)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}}\exp(ikx-\frac{a}{2}|k|)dk \\ &= \frac{1}{2}(\pi a)^{-\frac{1}{2}}\frac{4a}{4x^2+a^2} \\ &= \sqrt{\frac{a}{\pi}}\frac{2}{4x^2+a^2}\end{aligned}$$

1.3.3 Equation aux dérivées partielles : l'équation de Schrödinger en mécanique quantique

$$i\overline{h}\psi_t = \left[V(x) - \frac{\overline{h}^2}{2m}\nabla^2\right]\psi = H\psi$$

Si $V(x) = V$ est constante, on peut chercher une solution de la forme :

$$\psi(x,t) = A\exp(i(kx-\omega t))$$

En substituant :

$$i\overline{h}(-i\omega)\psi(x,t) = \left[V - \frac{h^2}{2m}(ih^2)\right]\psi(x,t)$$

La solution existe si : $\overline{h}\omega = V + \frac{h^2}{2m}h^2$. Pour une particule libre, $V \equiv 0$, on a :

$$\begin{aligned}i\overline{h}\psi_t = -\frac{h^2}{2m}\psi_{xx} \\ \psi(x,0) = \psi_0(x) \text{ et } \psi(x,t) \to 0 \text{ lorsque } |x| \to \infty\end{aligned}$$

La transformée de Fourier donne :

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_t(k,t) = \frac{-i\overline{h}k^2}{2m}\widehat{\phi}(k,t) \Rightarrow \widehat{\phi}(k,t) = \widehat{\phi_0}(k)\exp(-i\alpha k^2 t) \\ \text{car } \widehat{\phi}(k,0) = \widehat{\phi_0}(k)\end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{\overline{h}^2}{2m}$.
La solution est donc :

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi_0}(k) \exp(ik(x-\alpha kt))dk \\
&= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \psi(y,0) \exp(-iky)dy \int_{\mathbb{R}} \exp(ik(x-\alpha kt))dk \\
&= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \psi(y,0)dy \int_{\mathbb{R}} \exp(ik(x-y-\alpha kt))dk
\end{aligned}$$

$$\exp(ik(x-y-\alpha kt)) = \exp(-i\alpha t(k-(\frac{x-y}{2\alpha t}))^2 + i\frac{(x-y)^2}{4\alpha t})$$

On pose : $z = k - (\frac{x-y}{2\alpha t})$.

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \exp(i\frac{(x-y)^2}{4\alpha t})\psi(y,0)dy \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\alpha t z^2)dz \\
&= \frac{1-i}{\sqrt{4\alpha\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \psi(y,0) \exp(i\frac{(x-y)^2}{4\alpha t})dy
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les notes cours du professeur Metzener pour le calcul de l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-i\alpha t z^2)dz = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha t}}(1-i) \tag{1.4}$$

1.4 Analyse de Fourier et théorèmes

1.4.1 Théorème de Plancherel

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $||\widehat{f}||_2 = ||f||_2$.

Preuve :

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(ixy - tx^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp(-\frac{y^2}{4t})$$

$$\forall \epsilon > 0,\ v_\epsilon(x) = \exp(-\epsilon x^2) \Rightarrow \widehat{v_\epsilon(y)} = \frac{\exp(\frac{-y^2}{4\epsilon})}{\sqrt{2\epsilon}}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \widehat{w}(y) \exp(-\epsilon y^2)dy = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \int_{\mathbb{R}} w(x) \exp(\frac{-x^2}{4\epsilon})dx$$

Soit $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $v(x) = \overline{u}(-x)$, $w = u * v \in L^1 \cap C^0$.
Mais :

$$\widehat{v}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ixy)\overline{u}(-x)dx = \overline{\widehat{u}}(y) \Rightarrow \widehat{w} = \sqrt{2\pi}|\widehat{u}|^2$$

Comme w est continue :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \int_{\mathbb{R}} w(x) \exp(\frac{-|x^2|}{4\epsilon})dx = \sqrt{2\pi} w(0)$$

par ce qu'on avait montré dans le cours d'EDP. D'où :

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}|^2 dy = w(0) = \int_{\mathbb{R}} u(x)v(-x) = \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx$$

1.4.2 Théorème d'inversion de Fourier : version plus forte

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et continue sauf sur un nombre fini de points sur tout intervalle fini, $f(t) = \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) \forall t$. Alors :

$$f(t_0) = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \exp(i\omega t_0) \widehat{f}(\omega) d\omega$$

preuve :

$$\int_0^\infty \frac{sin(Au)}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
s(t_0,A) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \widehat{f}(\omega) \exp(i\omega t_0) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(i\omega(t_0 - t)) d\omega dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{-A}^{A} f(t) \exp(i\omega(t_0 - t)) d\omega dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t) sin(A(t_0 - t))}{t_0 - t} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t_0 - u) sin(Au)}{u} du.
\end{aligned}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(t_0 - u) sin(Au)}{u} du - f(t_{0-}) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(f(t_0 - u) - f(t_{0-})) sin(Au)}{u} du$$

Puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$, il existe X tel que :

$$\frac{2}{\pi}\int_X^\infty |f(t_0-u)|du < \epsilon$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(f(t_0-u)-f(t_{0-}))sin(Au)}{u}du &= \frac{2}{\pi}\int_0^X \frac{(f(t_0-u)-f(t_{0-}))sin(Au)}{u}du \\ &+ \frac{2}{\pi}\int_X^\infty \frac{f(t_0-u)sin(Au)}{u}du \\ &- \frac{2}{\pi}\int_X^\infty \frac{f(t_{0-})sin(Au)}{u}du \\ &= I_1+I_2+I_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{A\to\infty}\int_X^\infty \frac{sin(Au)}{u}du &= \lim_{A\to\infty}\int_{AX}^\infty \frac{sin(t)}{t}dt = 0 \\ &\Rightarrow I_3 \to 0 \text{ lorsque } A \to \infty.\end{aligned}$$

$$|I_2| = |\frac{2}{\pi}\int_X^\infty \frac{f(t_{0-u})sin(Au)}{u}du| \leq \frac{2}{\pi}\int_X^\infty |f(t_{0-u})|du < \epsilon$$

$\frac{f(t_0-u)-f(t_{0-})}{u}$ est continue sur $(0,X)$ sauf pour un nombre fini de points et elle est bornée, donc intégrable. Par le lemme de Riemann-Lebesgue, $I_1 \to 0$ lorsque $A \to \infty$. D'où :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(t_{0-u})sin(Au)}{u}du \to f(t_{0-}) \text{ lorsque } A \to \infty$$

Sur $(-\infty,0)$, le meme argument donne la convergence vers $f(t_{0+})$. Or :

$$\frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t_0-u)sin(Au)}{u}du = \frac{1}{\pi}\int_{-A}^A \widehat{f}(\omega)\exp(i\omega t_0)d\omega$$

Finalement :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^A \widehat{f}(\omega)\exp(i\omega t_0)d\omega \to f(t_0) \text{ lorsque } A \to \infty$$

1.4.3 Formule de Parseval

Soient $f,g \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)dk$$

preuve :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)dk &= \int_{\mathbb{R}} dk \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-iky)f(y)dy \int_{\mathbb{R}} \exp(-ikx)g(x)dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y)dy \int_{\mathbb{R}} g(x)dx \int_{\mathbb{R}} \exp(ik(x-y))dk \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(x)dx \int_{\mathbb{R}} f(y)\delta(x-y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(x)dx \int_{\mathbb{R}} f(y)dy
\end{aligned}$$

1.4.4 Equation de la chaleur avec second membre

Nous référons au livre "Partial differential equations" d'Evans. Soit le problème :

$$\begin{aligned}
u_t - \Delta u &= f \text{ sur } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\
u &= 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \times (t=0)
\end{aligned}$$

Soit :

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t}) \text{ pour } t > 0$$

qui est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. Comme $w = w(x,t\,;s) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y,t-s)f(y,s)dy$ résoud le problème

$$\begin{aligned}
u_t(\cdot\,;s) - \Delta u(\cdot\,;s) &= 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\
u(\cdot\,;s) &= f(\cdot\,;s) \text{ sur } \mathbb{R}^n \times (t=s)
\end{aligned}$$

On utilise ensuite le principe de Duhamel pour construire la solution du problème inhomogène à partir du problème précédent en intégrant par rapport à s. Considérons :

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^t w(x,t,s)ds \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y,t-s)f(y,s)dyds \\
&= \int_0^t \frac{1}{4\pi(t-s)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)})f(y,s)dyds
\end{aligned}$$

On obtient, par le cours d'équations aux dérivées partielles, que u satisfait l'équation de la chaleur avec second membre et qu'elle est de classe C^2.

1.5 Problème de Stokes dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ et résolution

Pour le problème de Stokes, nous avons étudié les notes écrites par le professeur Metzener.

1.5.1 Problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3$

Etant donné une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on cherche la pression $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et le champ de vitesse $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. L'équation de Stokes est une équation aux dérivées partielles qui décrit le mouvement des fluides dans l'approximation des milieux continus.

$$\begin{cases} \Delta u - \nabla p + f = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

Appliquons l'opérateur divergence à la première équation :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\Delta u) + \nabla \cdot \nabla p + \nabla f = 0 \quad &\Rightarrow \quad \Delta(\nabla \cdot u) - \Delta p + \nabla f = 0 \\ &\Rightarrow \quad \Delta p = \nabla f \end{aligned}$$

En appliquant la transformée de Fourier, on obtient :

$$-|\vec{\omega}|^2 \widehat{p} = i\vec{\omega} \cdot \widehat{f} \quad \Rightarrow \quad \widehat{p} = -|\vec{\omega}|^{-2} i\vec{\omega} \cdot \widehat{f} \tag{1.5}$$

Ceci donne l'expression suivante pour la pression p :

$$\begin{aligned} p &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int -|\vec{\omega}|^{-2} i\vec{\omega}\widehat{f} \exp(i\vec{\omega} \cdot \vec{x}) d\omega \\ &= (2\pi)^{-3} \int \int -|\vec{\omega}|^{-2} i\vec{\omega}\widehat{f} \exp(i\vec{\omega} \cdot (\vec{x} - \vec{y})) d\omega dy \end{aligned}$$

qui est assez complexe à calculer donc on va emprunter un autre chemin qui passe par le noyau de Poisson. On observe que :

$$\widehat{p} = -|\vec{\omega}|^{-2} \widehat{\nabla \cdot f}$$

et d'après le cours d'équations aux dérivées partielles, on obtient :

$$p = -\frac{1}{4\pi} \int \nabla_y \cdot f(y) \frac{dy}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{4\pi} \int f(y) \nabla_y \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} dy \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int f(y) \cdot \nabla_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} dy \\ &= -\frac{1}{4\pi} \nabla_x \cdot \int f(y) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} dy \\ &= \frac{1}{4\pi} \int f(y) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} dy \end{aligned}$$

Pour trouver u, nous allons employer deux méthodes. La première est d'utiliser nos résultats obtenus pour l'équation de Laplace :

$$\Delta u = g = \nabla p - f$$

Comme on connait p et f, on peut facilement résoudre l'équation ci-dessus :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla p - f}{|\vec{x}-\vec{y}|}dy \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla(\frac{1}{4\pi}\int f(z)\cdot\frac{\vec{x}-\vec{z}}{|\vec{x}-\vec{z}|^3}dz) - f}{|\vec{x}-\vec{y}|}dy \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant la méthode de Fourier. Appliquons la transformée de Fourier à la première équation du problème de Stokes et utilisons (1.5) :

$$\widehat{u} = |\vec{\omega}|^{-2}\widehat{f} - |\vec{\omega}|^{-4}\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\widehat{f})$$

Par la formule d'inversion et la connaissance du noyau de Poisson, on obtient :

$$u = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f(y)}{|\vec{x}-\vec{y}|}dy - (2\pi)^{-3}\int\int |\vec{\omega}|^{-4}\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot f(y))\exp(i\vec{\omega}\cdot(\vec{x}-\vec{y}))d\omega dy$$

Nous avons l'égalité :

$$\begin{aligned} &(2\pi)^{-3}\int\int |\vec{\omega}|^{-4}\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot f(y))\exp(i\vec{\omega}\cdot(\vec{x}-\vec{y}))d\omega dy \\ &= (2\pi)^{-3}\nabla_x(\nabla_x\cdot\int\int f(y)|\vec{\omega}|^{-4}\exp(i\vec{\omega}\cdot(\vec{x}-\vec{y}))d\omega dy) \end{aligned}$$

Le noyau est obtenu en résolvant l'équation :

$$\Delta^2\Psi = h$$

qui après transformation de Fourier devient :

$$\widehat{\Psi} = |\Omega|^{-4}\widehat{h} \tag{1.6}$$

On se souvient que pour l'équation de Laplace, l'équation radiale s'écrit :

$$\frac{1}{r^2}(r^2\Psi_r)_r = 0$$

Donc, l'équation radiale devient :

$$\frac{1}{r^2}(r^2(\frac{1}{r^2}(r^2\Psi_r)_r)_r)_r = 0$$

On trouve :

$$\Psi = C_1 r + C_2 r^2 + \frac{C_3}{r} + C_4$$

Le seul noyau singulier possible est : $r = |\vec{x} - \vec{y}|$. Par suite, on obtient la solution pour l'équation aux dérivées partielles de la même facon que pour l'équation de Laplace :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{1}{8\pi} \int \Delta^2 \Psi |\vec{x} - \vec{y}| dy \\ &= \frac{1}{8\pi} \int h(y) |\vec{x} - \vec{y}| dy \end{aligned}$$

On identifie le noyau :

$$\frac{1}{8\pi} |\vec{x} - \vec{y}| = (2\pi)^{-3} \int |\vec{\omega}|^{-4} \exp(i\vec{\omega} \cdot (\vec{x} - \vec{y})) d\omega$$

Par suite on arrive à :

$$u = \frac{1}{8\pi} \int \frac{f(y)}{|\vec{x} - \vec{y}|} dy + \frac{1}{8\pi} \int (\vec{x} - \vec{y}) \cdot \left(f(y) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \right) dy$$

1.5.2 Problème de Stokes dans $\mathbb{R}^2$

Comme dans $\mathbb{R}^3$, on peut exprimer p sous forme la intégrale suivante :

$$p = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} -i |\vec{\omega}|^{-2} (\vec{\omega} \cdot \vec{f(y)}) \exp(i\vec{\omega} \cdot (\vec{x} - \vec{y})) d\omega dy$$

On calcule l'intégrale suivante :

$$I = -i(2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} |\vec{\omega}|^{-2} (\vec{\omega} \cdot \vec{f(y)}) \exp(i\vec{\omega} \cdot (\vec{x} - \vec{y})) d$$

Posons :

$$\begin{aligned} x - y &= rR\vec{e_2}, \text{ R une rotation du plan} \\ \vec{\eta} &= \rho \vec{e_r} \\ \vec{\omega} &= R\vec{\eta} \\ \vec{e_r} &= \cos(\theta)\vec{e_1} + \sin(\theta)\vec{e_2} \end{aligned}$$

En passant aux coordonnées polaires, on obtient :

$$\begin{aligned} I &= -i(2\pi)^{-2} \int_{\rho=0}^{\infty} d\rho \int_{\theta=0}^{2\pi} (\vec{e_r} \cdot R^T f) \exp(i\rho r \sin(\theta)) d\theta \qquad (1.7) \\ &= -i(2\pi)^{-2} \int_{\rho=0}^{\infty} 2\pi i J_1(\rho r)(\vec{e_2} \cdot R^T f) d\rho \\ &= (2\pi)^{-1} \frac{f \cdot (\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \int_0^{\infty} J_1(\rho) d\rho \end{aligned}$$

Notons que (1.8) est obtenue en notant qu'on obtient :

$$\sin(\theta)\exp(i\rho r\sin(\theta)) = J_1. \tag{1.8}$$

Ceci implique :

$$p = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(y)\cdot(\vec{x}-\vec{y})}{|x-y|^2}dy$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(f(y)|\sigma|^{-2} - \sigma(\sigma\cdot f(y))|\sigma|^{-4}\right)\exp(i\sigma\cdot(x-y))d\sigma dy$$

qu'on peut récrire :

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(y)\log(|x-y|) + \nabla_x\nabla_x\int_{\mathbb{R}^2} f(y)K(x,y)dy$$

où $K(x,y)$ est le noyau décrivant l'équation biharmonique :

$$\Delta^2\psi = h(x) \Rightarrow \psi = \int_{\mathbb{R}^2} h(y)K(x,y)dy$$

Comme :

$$K = \frac{1}{8\pi}|x-y|^2(\log(|x-y|)-1),$$

on vérifie que

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(y)K(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^2}\Delta^2\psi K = \psi(x)$$

1.6 Propagation de flammes dans des tubes fermés : étude d'un article de recherche

Nous étudions le problème de la propagation dans un tube (dans l'article de recherche écrit par les professeurs Metzener et Matalon) dont la forme et la direction de propagation de la flamme sont données dans le dessin ci-après. La dérivation l'équation intégro-différentielle qui donne la position de la flamme, qu'on exprime en terme de la distorsion $\varphi(y,t)$ par rapport à une flamme plate, s'écrit :

$$\frac{1}{q}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{L}\varphi + \mathcal{L}(\varphi),$$

où L est une constante dépendant de l'aspect du tube, α est un paramètre donné, et $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire intégral. On exprime la pression par :

$$p(x,t) = P(t) + \gamma\mathcal{M}^2 p'(x,t) + \cdots$$

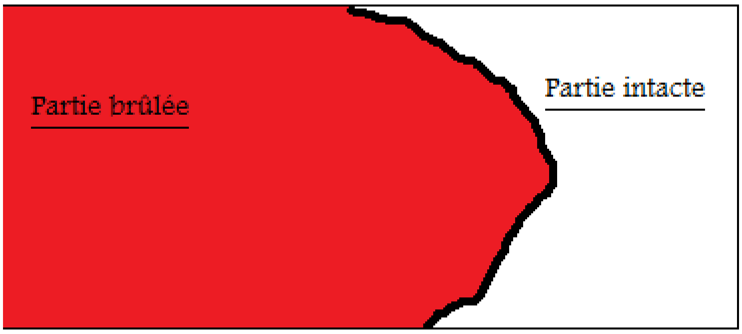

FIG. 1.1 – Schéma explicatif

où $M << 1$ représente la constante de Mach.

$$V_f = |F|^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) \tag{1.9}$$

On peut introduire le paramètre de Markstein :

$$\alpha = V_f \cdot n - n \cdot *(v * n) \tag{1.10}$$

Les équations qui gouvernent la propagation des flammes est :

$$\nabla \cdot v = -\frac{1}{\gamma P}\frac{dP}{dt}, \tag{1.11}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\nabla p', \tag{1.12}$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho^{-1}P^{\frac{1}{\gamma}}) = 0, \tag{1.13}$$

$$\rho T = P, \tag{1.14}$$

où v désigne la vitesse, ρ la densité, T la température, $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée convective. Si la flamme est décrite par $F(x,t) = 0$, avec $n = -\frac{\nabla F}{|\nabla F|}$, on peut écrire également les relations de saut à $x = x_f(t,y)$:

$$[\rho(v \cdot n - V_f)] = 0,$$

$$[p' + \rho(v \cdot n - V_f)(v \cdot n)] = 0,$$

$$[v \times n] = 0,$$

$$[T] = q.$$

Nous allons nous intéresser au cas des flammes planes. La vitesse axiale $v = ui$ est donnée par :

$$u = \begin{cases} -(\frac{\dot{P}}{\gamma P})x & \text{pour } 0 < x < x_f \\ (\frac{\dot{P}}{\gamma P})(L - x) & \text{pour } x_f < x < L \end{cases} \tag{1.15}$$

et la position de la flamme est donnée par :

$$x_f(t) = L\left(1 - \frac{P_e - P}{P_e - 1}P^{\frac{-1}{\gamma}}\right) \tag{1.16}$$

$$P = 1 + \frac{\gamma q t}{L} \tag{1.17}$$

La fonction $\psi(\eta)$ est déterminée par les relations implicites :

$$\psi(\eta) = 1 + qP^{\frac{-(\gamma-1)}{\gamma}}, \tag{1.18}$$

$$\eta = x_f P^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{1.19}$$

Pour des petites valeurs de q, on peut donner une forme simplifiée de la vitesse axiale :

$$u \approx \begin{cases} \frac{qx}{L} + \frac{\gamma q^2 x t}{L^2} + \cdots & \text{pour } 0 < x < x_f \\ q(1 - \frac{x}{L}) - \gamma q^2(1 - \frac{x}{L})(\frac{t}{L}) + \cdots & \text{pour } x_f < x < L \end{cases} \tag{1.20}$$

avec la position de la flamme qui s'exprime :

$$x_f \approx t(1 + q(1 - \frac{t}{L}) + \cdots) \tag{1.21}$$

La fonction $\psi(\eta)$ a la forme :

$$\psi(\eta) \approx 1 + q - q^2(\gamma - 1)\frac{\eta}{L} + \cdots \tag{1.22}$$

et comme la densité et la température sont données par :

$$T = P^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}\psi(xP^{\frac{1}{\gamma}}) \tag{1.23}$$

$$\rho = \frac{P^{\frac{1}{\gamma}}}{\psi(xP^{\frac{1}{\gamma}})} \tag{1.24}$$

alors une substitution nous donne les solutions explicites.

Dans le cas des flammes non planaires, on introduit les développements suivants :

$$u = \bar{u} + q^2 U(x,y,t) + \cdots$$
$$v = q^2 V(x,y,t) + \cdots$$
$$p' = \bar{p}' + q^2 \Pi(x,y,t) + \cdots$$

où $\bar{p}'$ et $\bar{u}$ sont les solutions dans le cas des flammes planaires. Les équations à l'ordre $O(q)$ sont :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x},$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}.$$

A la position $x = t$, on a :

$$[U] = [\Pi] = 0,\ [V] = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Il reste de l'équation pour le taux de combustion et le "flame stretch" :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = q\left(\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{L}\phi + U^*\right)$$

où $U^* = U(x = t,y,t)$. On résout ce système d'équations aux dérivées partielles en appliquant une transformée de Fourier en y. Par souci de simplifier les notations, on note $u = (U,V)$ et $p = \Pi$, et on récrit le système :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot u &= 0 \\ u_t &= -\nabla p \end{aligned}$$

On a, en appliquant le rotationnel à la seconde équation :

$$\begin{aligned} \partial_t \nabla \times u &= 0 \\ &\Rightarrow \quad \nabla \times u = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < x < L \\ f(x,y) \text{ pour } 0 < x < t \end{cases} \end{aligned}$$

par le théorème de Heimholtz.
Comme $\nabla \cdot u = 0$, u peut donc s'exprimer par un rotationnel :

$$u = \nabla \times \psi = (-\psi_y,\psi_x)$$

Pour $t < x < L$ (2), on a :

$$\nabla \times u = \nabla \times (\nabla \times \phi) = \Delta\phi = 0.$$

Pour $0 < x < t$ (1), on a :

$$\nabla \times u = \Delta\psi = f(x,y)$$

Dans le premier cas, on a une équation de Laplace à résoudre, dans le second, une équation de Poisson. Pour les pressions dans les 2 régions, nous avons :

$$-p_y = \phi_{xt} \text{ et } -p_y = \psi_{xt}.$$

En prenant les transformées de Fourier dans (2), on obtient :

$$\widehat{\phi}_{xx} - \sigma^2\widehat{\phi} = 0$$

La solution est :

$$\widehat{\phi} = \widehat{A}\sinh(\sigma(x-L))$$

par les conditions au bord.
Ceci nous permet d'écrire, sachant la relation entre ϕ et u, p :

$$\begin{aligned}\widehat{U} &= -i\sigma\widehat{A}\sinh(\sigma(x-L)),\\ \widehat{V} &= \sigma\widehat{A}\cosh(\sigma(x-L)),\end{aligned}$$

$$-i\sigma\widehat{p} = \sigma\widehat{A_t}\cosh(\sigma(x-L)).$$

Ecrivons l'équation de Poisson avec la transformée de Fourier dans (1) :

$$\widehat{\psi}_{xx} - \sigma^2\widehat{\psi} = \widehat{f}(x)$$

La solution est donnée en utilisant la méthode de la variation des constantes :

$$\widehat{\psi} = \widehat{B}\sinh(\sigma x) + \widehat{C}\cosh(\sigma x) + \widehat{\psi_{\textbf{particulière}}}$$

avec la solution particulière donnée par :

$$\widehat{\psi_{particulire}} = \frac{1}{2\sigma}\int_0^x \sinh(\sigma(x-\xi))\widehat{f}(\xi)d\xi$$

On en déduit, par dérivation :

$$\widehat{U} = -i\sigma\Big[\widehat{B}\sinh(\sigma x) + \widehat{C}\cosh(\sigma x) +$$

$$[U] = 0 \Rightarrow \widehat{A}\sinh(\sigma(t-L)) = \widehat{B}\sinh(\sigma t) + \frac{1}{2\sigma}\int_0^t \sinh(\sigma(t-\xi))\widehat{f}(\xi)d\xi \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned} [V] &= -\frac{\partial\phi}{\partial y} \Rightarrow \widehat{V_1} - \widehat{V_2} = i\sigma\widehat{\phi} \\ \sigma\widehat{B}\cosh(\sigma t) + \frac{1}{2}\int_0^t \cosh(\sigma(t-\xi))\widehat{f}(\xi)d\xi &= \sigma\widehat{A}\cosh(\sigma(t-L)) + i\sigma\widehat{\phi} \end{aligned}$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{A_t}\cosh(\sigma(t-L)) + \sigma\widehat{A}\sinh(\sigma(t-L)) + i\widehat{\phi_t} &= \widehat{B_t}\cosh(\sigma t) + \sigma\widehat{B}\sinh(\sigma t) + \frac{1}{2\sigma}\widehat{f}(t) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \sinh(\sigma(t-\xi))\widehat{f}(\xi)d\xi \end{aligned}$$

Mais par (1.26), on simplifie :

$$\widehat{A_t}\cosh(\sigma(t-L)) + i\widehat{\phi_t} = \widehat{B_t}\cosh(\sigma t) + \frac{1}{2\sigma}\widehat{f}(t)$$

Par (**??**)

$$\widehat{f}(t) = 2i\sigma\widehat{\varphi_t}$$

Maintenant qu'on a éliminé $\widehat{f}(t)$, on va pouvoir résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{gathered} \widehat{B_t}\cosh(\sigma t) = \widehat{A_t}\cosh(\sigma(t-L)) \\ \widehat{A}\sinh(\sigma(t-L)) = \widehat{B}\sinh(\sigma t) + i\int_0^t \sinh(\sigma(t-\xi))\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \end{gathered}$$

On trouve :

$$\widehat{A} = i\int_0^t \frac{\cosh(\sigma\tau)}{\sinh(\sigma L)} \tag{1.27}$$

On en déduit $\widehat{B}$ puis les solutions $\widehat{U}$ et $\widehat{V}$, qui se trouvent dans l'article de recherche :

$$\widehat{U} = \begin{cases} -\sigma^2\int_0^t \frac{\cosh(\sigma(L-\tau))}{\sinh(\sigma L)}\widetilde{\phi}(\sigma,\tau)d\tau + \sigma^2\int_0^x \cosh(\sigma(x-\xi))\widehat{\phi}(\sigma,\xi)d\xi & \text{pour } x < t \\ \\ -\sigma^2\int_0^t \frac{\cosh(\sigma\tau)}{\sinh(\sigma L)}\widetilde{\phi}(\sigma,\tau)d\tau\sinh(\sigma(L-x)) & \text{pour } x > t \end{cases}$$

$$\widehat{V} = \begin{cases} -\sigma\int_0^t \frac{\cosh(\sigma(L-\tau))}{\sinh(\sigma L)}\widetilde{\phi}(\sigma,\tau)d\tau\cosh(\sigma x) + \widehat{\phi}(\sigma,x) + \sigma\int_0^x \sinh(\sigma(x-\xi))\widehat{\phi}(\sigma,\xi)d\xi & \text{pour } x < t \\ \\ -\sigma\int_0^t \frac{\cosh(\sigma\tau)}{\sinh(\sigma L)}\widetilde{\phi}(\sigma,\tau)d\tau\cosh(\sigma(L-x)) & \text{pour } x > t \end{cases}$$

Chapitre 2

Transformée de Laplace

Une technique assez puissante pour résoudre les équations différentielles et aux dérivées partielles est la transformée de Laplace, qui transforme ces équations en expressions algébriques élémentaires. Pour cette partie, nous avons étudié "The Laplace transform" de Schieff.

2.1 Préliminaires

Définition 2.1.1. *Une fonction est dite continue par morceaux sur* $[0,\infty)$ *si :*
- $\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$.
- f *est continue pour tout intertvalle fini* $(0,b)$ *sauf sur un nombre fini de points où* f *a des sauts.*

Une conséquence importante de la continuité par morceaux est que sur chaque sous-intervalle de continuité, la fonction f est bornée :

$$|f(t)| \leq M_i,\ t_i < t < t_{i+1},\ i = 1,\ 2,\ldots,n-1.$$

Définition 2.1.2. *Une fonction* f *a un ordre exponentiel* α *s'il existe des constantes* $M > 0$ *et* α *tel que pour un certain* $t_0 \geq 0$,

$$|f(t)| \leq M\exp(\alpha t),\ t \geq t_0.$$

Définition 2.1.3. *On définit la classe* $\mathcal{T}_{alpha}$ *des fonctions continues par morceaux et d'ordre exponentiel* α.

2.2 Définition de la transformée et propriétés

Définition 2.2.1. *Pour toute fonction* f *à valeurs réelles ou complexes dans l'espace fonctionnel* $\mathcal{T}_{alpha}$, *on définit une fonction* $F : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *qu'on dénomme la transformée de Laplace :* $\mathcal{L}(f) = F(s)$ *de* f *par :*

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} \exp(-st)f(t)dt = F(s)$$

où le paramètre $s = x + iy$ est dans le domaine : $x = \mathcal{R}e(s) > \alpha$.

Exemple 2.2.2.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\exp(at)) &= \int_0^{\infty} \exp(-(s-a)t)dt \\ &= \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

Théorème 2.2.3. *Si $f \in \mathcal{T}_{alpha}$, alors la transformée de Laplace existe pour $x = \mathcal{R}e(s) > \alpha$ et l'intégrale de Laplace converge absolument.*

preuve :
On a, d'une part :

$$|f(t)| \leq M_1 \exp(\alpha t),\ t \geq t_0.$$

f est de plus continue par morceaux sur $[0,t_0]$ et donc bornée sur cet intervalle, disons :

$$|f(t)| \leq M_2,\ 0 < t < t_0.$$

Puisque $\exp(\alpha t)$ a un minimum positif sur $[0,t_0]$, on peut choisir une constante M suffisamment grande pour que :

$$|f(t)| \leq M \exp(\alpha t),\ t > 0.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau} |\exp(-st)f(t)|dt &\leq M\int_0^{\tau} \exp(-(x-\alpha)t)dt \\ &= \frac{M}{x-\alpha} - \frac{M\exp(-(x-\alpha)\tau)}{x-\alpha}.\end{aligned}$$

Lorsque $\tau \to \infty$ et notant que $\mathcal{R}e(s) = x > \alpha$, on obtient :

$$\int_0^{\infty} |\exp(-st)f(t)|dt \leq \frac{M}{x-\alpha}.$$

L'intégrale de Laplace converge donc absolument pour $\mathcal{R}e(s) > \alpha$.

Application :
$f(t) = t$ est continue et d'ordre exponentiel, sa transformée de Laplace se calcule :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \int_0^\infty t \exp(-st)dt \\
&= \frac{1}{s}\int_0^\infty \exp(-st)dt \\
&= \frac{1}{s}\frac{1}{s} \\
&= \frac{1}{s^2}.
\end{aligned}$$

Montrons par récurrence que :

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

C'est vrai pour $n = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t^{n+1}) &= \int_0^\infty t^{n+1} \exp(-st)dt \\
&= \int_0^\infty (t^{n+1})' \frac{\exp(-st)}{s} dt \\
&= \frac{(n+1)}{s}\int_0^\infty t^n \exp(-st)dt \\
&= \frac{(n+1)}{s}\frac{n!}{s^{n+1}} \\
&= \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.
Linéarité de la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) &= \int_0^\infty \exp(-st)(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))dt \\
&= c_1 \int_0^\infty \exp(-st) f_1(t)dt + c_2 \int_0^\infty \exp(-st) f_2(t)dt \\
&= c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2).
\end{aligned}$$

Application :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\cosh(\omega t)) &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(\exp(\omega t)) + \mathcal{L}(\exp(-\omega t))\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{s+\omega}\right) \\
&= \frac{s}{s^2-\omega^2}.
\end{aligned}$$

Séries infinies

Théorème 2.2.4. *Si*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

converge pour tout $t \geq 0$*, avec*

$$|a_n| \leq \frac{K\alpha^n}{n!}$$

pour tout n *suffisamment grand and* $\alpha > 0$*,* $K > 0$*, alors :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}(t^n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}} \ (\mathcal{R}e(s) > \alpha.
\end{aligned}$$

Preuve :

Puisque $f(t)$ est représentée par une série de puissance convergente, alors elle est continue sur $[0,\infty)$. On veut montrer que la différence

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{L}(f(t)) - \sum_{n=0}^{N} a_n \mathcal{L}(t^n)\right| &= \left|\mathcal{L}\left(f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\right)\right| \\
&\leq \mathcal{L}_x\left(\left|f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\right|\right)
\end{aligned}$$

converge vers 0 lorsque $N \to \infty$, où

$$\mathcal{L}_x(h(t)) = \int_0^{\infty} \exp(-xt)h(t)dt, \; x = \mathcal{R}e(s).$$

$$\begin{aligned}\left|f(t)-\sum_{n=0}^{N}a_nt^n\right| &= \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nt^n\right|\\ &\leq K\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(\alpha t)^n}{n!}\end{aligned}$$

$$= K\left(\exp(\alpha t)-\sum_{n=0}^{N}\frac{(\alpha t)^n}{n!}\right)$$

Comme :

$$h \leq g \Rightarrow \mathcal{L}_x(h) \leq \mathcal{L}_x(g)$$

quand les transformées existent,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_x\left(\left|f(t)-\sum_{n=0}^{N}a_nt^n\right|\right) &\leq K\mathcal{L}_x\left(\exp(\alpha t)-\sum_{n=0}^{N}\frac{(\alpha t)^n}{n!}\right)\\ &= K\left(\frac{1}{x-\alpha}-\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha^n}{x^{n+1}}\right)\\ &= K\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^n\right)\ (x>\alpha)\end{aligned}$$

Ceci converge vers 0 lorsque $N \to \infty$. D'où :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}a_n\mathcal{L}(t^n)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nn!}{s^{n+1}}\ (\mathcal{R}e(s)>\alpha.\end{aligned}$$

Exemple 2.2.5.

$$f(t)=\frac{\sin t}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nt^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$|a_{2n}|=\frac{1}{(2n+1)!}<\frac{1}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nt^{2n}}{(2n+1)!}\right)$$

Théorème 2.2.6. *Si $f \in \mathcal{T}_{alpha}$, et telle que*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$$

existe, alors

$$\int_s^\infty F(x)dx = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) \ (s > \alpha).$$

preuve :

$$F(x) = \int_0^\infty \exp(-xt)f(t)dt \Rightarrow \int_s^\infty F(x)dx = \lim_{w\to\infty} \int_s^w \left(\int_0^\infty \exp(-xt)f(t)dt\right) dx$$

Comme $\int_0^\infty \exp(-xt)f(t)dt$ converge uniformément pour $\alpha < s \leq x \leq w$, on peut permuter l'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned}
\int_s^\infty F(x)dx &= \lim_{w\to\infty} \int_0^\infty \left(\int_s^w \exp(-xt)f(t)dx\right) dt \\
&= \int_0^\infty \exp(-st)\frac{f(t)}{t}dt - \lim_{w\to\infty} \int_0^\infty \exp(-wt)\frac{f(t)}{t}dt \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que :

$$\left|\int_0^\infty \exp(-st)\frac{f(t)}{t}dt\right| \leq \frac{M}{x-\alpha} \to 0$$

lorsque $x \to \infty$.

La transformée de Laplace jouit de propriétés similaires à la transformée de Fourier, qu'on va énoncer sans démonstration, car les preuves sont analogues.

Exemple 2.2.7.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}(s)\right)(s) &= \int_s^\infty \mathcal{L}(\sin t)dt \\
\mathcal{L}(\sin t)(s) &= \frac{1}{2i}(\mathcal{L}(\exp(it)) - \mathcal{L}(\exp(-it)))(s) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right) \\
&= \frac{1}{s^2+1} \\
\Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right)(s) &= \int_s^\infty \frac{dx}{x^2+1} \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan(s).
\end{aligned}$$

En supposant les fonctions assez régulières, on a les propriétés suivantes pour la transformée de Laplace :

Théorème 2.2.8 (Formule d'inversion de la transformée de Laplace)**.**

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(st)F(s)ds$$

où c est une constante plus grande que la partie réelle des singularités de $F(s)$.

Proposition 2.2.9 (Translation)**.** *Si $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$, alors :*

$$\mathcal{L}(\exp(-at)f(t)) = F(s+a).$$

Exemple 2.2.10.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^n \exp(at)) &= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \\ \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right) &= \frac{1}{n!}t^n \exp(at) \end{aligned}$$

Proposition 2.2.11 (Dilatation)**.**

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Proposition 2.2.12 (Transformée de Laplace des dérivées)**.**

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n\mathcal{L}(f(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0)$$

Proposition 2.2.13 (Transformée de Laplace d'une convolution)**.**

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t)) = \mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t))$$

Exemple 2.2.14. *On utilise le théorème de convolution pour prouver :*

$$\begin{aligned} B(m,n) &= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},\ \textit{où} \\ B(m,n) &= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx,\ (m>0,\ n>0). \end{aligned}$$

On considère :

$$f(t) = t^{m-1}\ \textit{et}\ g(t) = t^{n-1}.$$

Comme on a :

$$F(s) = \frac{\Gamma(m)}{s^m}\ \textit{et}\ G(s) = \frac{\Gamma(n)}{s^n}$$

Par la formule de convolution, on a :

$$\begin{aligned} f * g &= \int_0^t \tau^{m-1}(t-\tau)^{n-1} d\tau = \mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) \\ &= \Gamma(m)\Gamma(n)\mathcal{L}^{-1}(s^{-(m+n)} \\ &= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} t^{m+n-1} \end{aligned}$$

En prenant $t = 1$, on obtient le résultat à démontrer.

Proposition 2.2.15 (Dérivées de la transformée de Laplace)**.** *Si $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$, alors*

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

Exemple 2.2.16. *On veut trouver :*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\log(\left(\frac{s+a}{s+b}\right))\right).$$

Puisque :

$$\frac{d}{ds}\log\left(\frac{s+a}{s+b}\right) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(t) &= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right) \\ &= \frac{1}{t}(\exp(-bt) - \exp(-at)) \end{aligned}$$

Deux propriétés de la transformée de Laplace sont très utiles lorsqu'on veut déterminer des limites d'une fonction lorsqu'elle tend vers 0 ou ∞, même si la fonction n'est pas connue explicitement.

Théorème 2.2.17. *Si $f \in \mathcal{T}_\alpha$, f' est continue par morceaux et $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$, alors :*

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Preuve :

On sait que :

$$\mathcal{L}(f'(t) = G(s) \to 0 \text{ lorsque } s \to \infty$$

Or, par le théorème sur la transformée de Laplace des dérivées :

$$G(s) = sF(s) - \lim_{t\to 0^+} f(t)$$

En prenant la limite, on obtient le résultat.

Théorème 2.2.18. *Si $f \in \mathcal{T}_\alpha$, f' est continue par morceaux, $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ et $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe, alors :*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Preuve :

$$\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} sF(s) - \lim_{t\to 0} f(t)$$

De plus :

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} G(s) &= \lim_{s\to 0} \int_0^\infty \exp(-st) f'(t)dt \\ &= \int_0^\infty f'(t)dt, \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty f'(t)dt = \lim_{\tau\to\infty} [f(\tau) - \lim_{t\to 0} f(t)]$$

D'où :

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s).$$

2.2.1 Relation entre les deux tranformées

Dans cette partie, nous allons voir comment écrire la transformée de Laplace en fonction de la transformée de Fourier. La transformée de Laplace d'une fonction f existe pour $z = x + iy$, $x > \gamma$, on suppose

$$f(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0 \\ f(t), \ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(z) &= \int_0^\infty f(t) \exp(-xt) \exp(-iyt)dt \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(h(t,x)) \end{aligned}$$

où la fonction h de transfert est :

$$h(t,x) = \begin{cases} \exp(-xt) f(t), \ t \geq 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases}$$

Bibliographie

[1] Evans, *Partial differential equations.*

[2] Chatterji, *Cours d'Analyse.*

[3] Dambaru Bhatta, *Integral transforms and applications.*

[4] Schieff, *The Laplace transform.*

[5] Philippe Metzener, *Notes et article de recherche.*