

# Chapitre 2

## Théorie du potentiel

On a vu que le très grand nombre d'étoiles contenues dans une galaxie permet de remplacer une somme sur toutes ces étoiles par un potentiel moyen et lisse. Cela, d'autant plus que le temps de relaxation est en général beaucoup plus long que l'âge des galaxies considérées. Ce chapitre est consacré à l'art de calculer le champ de force gravitationnel dans une galaxie ainsi idéalisée.

Après quelques résultats généraux qui seront utiles par la suite, on traite d'abord les potentiels sphériques, qui sont les plus simples, puis les systèmes aplatis, y compris les disques minces. Enfin, on traite le potentiel de notre Galaxie.

### 2.1 Généralités

Le but est de calculer la force  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  exercée sur une particule de masse  $m_s$  située en position  $\mathbf{x}$  par une distribution de masse  $\rho(\mathbf{x}')$ . La force de gravité étant additive, on peut sommer les contributions venant des volumes  $d^3\mathbf{x}'$  :

$$\delta\mathbf{F}(\mathbf{x}) = Gm_s \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \delta m(\mathbf{x}') = Gm_s \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \quad (2.1)$$

La force totale qui s'exerce sur une masse  $m_s$  vaut donc :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = m_s \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \text{où} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv G \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  est le **champ gravitationnel**, qui est la force gravitationnelle par unité de masse. On définit le **potentiel gravitationnel** par :

$$\Phi(\mathbf{x}) \equiv -G \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \quad (2.3)$$

En notant que :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \right) = \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \quad (2.4)$$

on voit que l'on peut exprimer  $\mathbf{g}$  sous la forme :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \int d^3\mathbf{x}' \frac{G\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} = -\nabla\Phi \quad (2.5)$$

(on a laissé tomber l'indice  $\mathbf{x}$  du  $\nabla$  pour la simplicité de la notation). Prenant la divergence de l'Equ. (2.2), on obtient :

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = G \int d^3\mathbf{x}' \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \rho(\mathbf{x}') \quad (2.6)$$

Or on a la relation :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = -\frac{3}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} + \frac{3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^5} \quad (2.7)$$

Tant que  $\mathbf{x}' - \mathbf{x} \neq 0$ , on peut simplifier la dernière fraction par  $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2$ , si bien que l'Equ. (2.7) se réduit à :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = 0 \quad (\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}) \quad (2.8)$$

Par conséquent, la seule contribution à l'intégrale de l'Equ. (2.6) doit nécessairement provenir du point  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ ; on peut alors restreindre le volume d'intégration à une petite sphère de rayon  $h$  centrée en ce point, et admettre que, pour  $h$  suffisamment petit, la densité  $\rho(\mathbf{x}')$  est constante, de sorte qu'on peut la sortir de l'intégrale. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq h} d^3\mathbf{x}' \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \\ &= -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq h} d^3\mathbf{x}' \nabla_{\mathbf{x}'} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \\ &= -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq h} d^2\mathbf{S}' \cdot \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \end{aligned} \quad (2.9)$$

où l'on a utilisé le théorème de la divergence pour passer d'une intégrale de volume à une intégrale de surface. Si  $d^2\Omega$  est un élément d'angle solide, un élément de surface sur la petite sphère  $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = h$  vaut  $d^2\mathbf{S}' = (\mathbf{x}' - \mathbf{x})hd^2\Omega$  et l'Equ. (2.9) devient alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) \int d^2\Omega = -4\pi G\rho(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (2.10)$$

L'équation de droite n'est autre que l'équation de Poisson, qui permet de trouver  $\Phi(\mathbf{x})$  à partir de  $\rho(\mathbf{x})$  et de conditions aux limites appropriées. Pour un système isolé, la condition est  $\Phi \rightarrow 0$  pour  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Pour une densité nulle, l'équation de Poisson devient **l'équation de Laplace** :

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (2.11)$$

En intégrant l'équation de Poisson sur un volume englobant la masse  $M$ , puis en appliquant le théorème de la divergence, on obtient (en parcourant l'équation de droite à gauche) :

$$4\pi GM = 4\pi G \int d^3\mathbf{x}\rho = \int d^3\mathbf{x}\nabla^2\Phi = \int d^2\mathbf{S}\nabla\Phi \quad (2.12)$$

qui n'est autre que le **théorème de Gauss**, selon lequel *l'intégrale de la composante normale de  $\nabla\Phi$  sur une surface fermée quelconque est égale à la masse contenue à l'intérieur de cette surface, multipliée par  $4\pi G$* . Le champ de gravitation  $\mathbf{g}$  étant le gradient d'un potentiel, il est conservatif : autrement dit, le travail effectué contre la force de gravitation en amenant deux étoiles de l'infini à une configuration donnée est indépendant du chemin que l'on fait parcourir à ces étoiles, et ce travail est défini comme étant **l'énergie potentielle** du système.

Formellement, la différence d'énergie potentielle entre les états 1 et 2 d'un système est définie comme  $W_{12} = -\int_1^2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}$ . Si l'état 1 est l'infini, on a alors  $W_{\infty 2} \equiv W_2 = -\int_{\infty}^2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F} = \int_2^{\infty} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}$ . On peut donc dire aussi que l'énergie potentielle d'un système est le travail effectué par la force de gravitation, lorsque ses constituants sont écartés de leur position initiale vers l'infini.

L'énergie potentielle d'un système se calcule en imaginant qu'une partie du système est déjà en place, avec une densité  $\rho(\mathbf{x})$  et un potentiel  $\Phi(\mathbf{x})$ . Le travail effectué pour amener un élément de masse  $\delta m$  de l'infini à  $\mathbf{x}$  est  $\delta m\Phi(\mathbf{x})$ . Un petit incrément de densité  $\delta\rho(\mathbf{x})$  conduit donc à un incrément d'énergie potentielle :

$$\delta W = \int d^3\mathbf{x} \delta\rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) \quad (2.13)$$

Par ailleurs, selon l'équation de Poisson, l'incrément de potentiel  $\delta\Phi(\mathbf{x})$  est lié à l'incrément de densité par la relation  $\nabla^2(\delta\Phi) = 4\pi G\delta\rho$ , et en substituant  $\delta\rho$  dans l'Equ. (2.13), on obtient :

$$\delta W = \frac{1}{4\pi G} \int d^3\mathbf{x} \Phi \nabla^2(\delta\Phi) \quad (2.14)$$

Le théorème de la divergence permet d'écrire :

$$\int_V d^3\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{F} = \oint_S d^2\mathbf{S} \cdot \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \int d^3\mathbf{x} g \nabla \cdot \mathbf{F} = \oint_S g \mathbf{F} \cdot d^2\mathbf{S} - \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{F} \cdot \nabla)g$$

**Question - exercice :** Montrer la relation ci-dessus.

ce qui permet d'écrire l'Equ. (2.14) sous la forme :

$$\delta W = \frac{1}{4\pi G} \int \Phi \nabla(\delta\Phi) \cdot d^2\mathbf{S} - \frac{1}{4\pi G} \int d^3\mathbf{x} \nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi) \quad (2.15)$$

Or l'intégrale sur la surface disparaît, parce que la fonction sous l'intégrale varie comme  $1/r^3$  (en effet,  $\Phi \propto 1/r$  et  $\nabla(\delta\Phi) \propto 1/r^2$ ) quand  $r \rightarrow \infty$ , alors que la surface varie comme  $r^2$ . La surface étant arbitraire, elle peut être aussi lointaine que l'on veut du système, donc cette intégrale disparaît effectivement. Quant à la fonction sous l'intégrale de volume, on voit facilement que  $\nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi) = \frac{1}{2}\delta(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) = \frac{1}{2}\delta|\nabla\Phi|^2$ . On obtient alors :

$$\delta W = -\frac{1}{8\pi G} \delta \left( \int d^3\mathbf{x} |\nabla\Phi|^2 \right) \quad \Rightarrow \quad W = -\frac{1}{8\pi G} \left( \int d^3\mathbf{x} |\nabla\Phi|^2 \right) \quad (2.16)$$

En appliquant à nouveau le théorème de la divergence et en remplaçant  $\nabla^2\Phi$  par  $4\pi G\rho$ , on a également :

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

## 2.2 Systèmes sphériques

Il est utile de rappeler ici les deux premiers théorèmes de Newton qui permettent de calculer le potentiel gravitationnel de n'importe quelle distribution de matière à symétrie sphérique :

**Premier théorème de Newton :** *Un corps situé à l'intérieur d'une coquille sphérique de matière ne subit aucune force gravitationnelle résultante de la part de cette coquille.*

**Deuxième théorème de Newton :** *La force de gravitation exercée sur un corps par une coquille sphérique de matière est identique à celle qui résulterait de la même quantité de matière concentrée au centre de la coquille.*

Un important corollaire du premier théorème est que le champ potentiel de gravitation à l'intérieur d'une coquille sphérique vide est constant, car  $\nabla\Phi = -\mathbf{g} = 0$ . Ainsi, on peut évaluer le potentiel  $\Phi(\mathbf{x})$  pour  $\mathbf{x}$  situé n'importe où à l'intérieur de la coquille, en utilisant l'Equ. (2.3) ; or le choix le plus simple est évidemment de prendre  $\mathbf{x}$  au centre de la coquille, et l'intégration donne immédiatement :

$$\Phi = -\frac{GM}{R}. \quad (2.18)$$

Une conséquence des deux premiers théorèmes est que l'attraction gravitationnelle d'une distribution de densité dotée de symétrie sphérique  $\rho(r')$  sur une masse unité située au rayon  $r$ , est entièrement définie par la masse qui se trouve à l'intérieur de  $r$  :

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} \hat{e}_r \quad (2.19)$$

où  $\hat{e}_r$  est le vecteur-unité radial, et avec :

$$M(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \quad (2.20)$$

On peut considérer le potentiel comme la somme des potentiels des coquilles sphériques concentriques de masse  $dM(r) = 4\pi\rho(r)r^2dr$ . On peut calculer le potentiel en  $\mathbf{r}$  engendré par une distribution arbitraire, mais de symétrie

sphérique,  $\rho(r')$ , en additionnant les contributions, d'une part des coquilles ayant  $r' < r$ , d'autre part des coquilles ayant  $r' > r$ . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= -\frac{G}{r} \int_0^r dM(r') - G \int_r^\infty \frac{dM(r')}{r'} \\ &= -4\pi G \left[ \frac{1}{r} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') + \int_r^\infty dr' r' \rho(r') \right] \quad (2.21)\end{aligned}$$

On peut vérifier que :

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi = -\frac{GM(r)}{r^2} \hat{e}_r$$

En effet, pour une fonction  $f$  telle que  $f(r) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow 0$  ou  $r \rightarrow \infty$ , et si  $F$  est la primitive de  $f$ , on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} \int_0^r f(r') dr' &= \frac{d}{dr} [F(r) - F(0)] = f(r) \\ \frac{d}{dr} \int_r^\infty f(r') dr' &= \frac{d}{dr} [F(\infty) - F(r)] = -f(r)\end{aligned}$$

Par conséquent, pour un potentiel sphérique :

$$\begin{aligned}\nabla\Phi &= \frac{d}{dr}\Phi \hat{e}_r = -4\pi G \left[ -\frac{1}{r^2} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') + \frac{1}{r} r^2 \rho(r) - r \rho(r) \right] \hat{e}_r \\ &= \frac{G}{r^2} 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \hat{e}_r = \frac{GM(r)}{r^2} \hat{e}_r\end{aligned}$$

Il est utile de calculer la **vitesse circulaire** d'une étoile-test, de masse négligeable, orbitant à distance  $r$  du centre. L'accélération centripète vaut  $v_c^2/r$ , donc :

$$v_c^2 = r|\mathbf{F}| = r \frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM(r)}{r} \quad (2.22)$$

La fréquence angulaire correspondante, appelée **fréquence circulaire**, est donnée par :

$$\Omega \equiv \frac{v_c}{r} = \sqrt{\frac{GM(r)}{r^3}} \quad (2.23)$$

Ces deux grandeurs sont un moyen de mesurer la masse à l'intérieur de  $r$ . Une autre grandeur importante, la **vitesse d'évasion**, est donnée par :

$$v_e(r) \equiv \sqrt{2|\Phi(r)|} \quad (2.24)$$

On l'obtient en posant que l'énergie mécanique est constante, et nulle à l'infini donc aussi au rayon  $r$  :

$$\Phi(r) m + \frac{1}{2} m v_e^2 = 0$$

La vitesse d'évasion dépend de la masse à l'intérieur de  $r$  aussi bien que de la masse à l'extérieur.

**L'énergie potentielle des systèmes sphériques** se tire de l'équation suivante (non démontrée ici, mais voir Binney & Tremaine 2008, pp. 59-60)

$$W = - \int d^3\mathbf{x} \rho \mathbf{x} \cdot \nabla \Phi \quad \Rightarrow \quad W = -4\pi G \int_0^\infty dr r \rho(r) M(r) \quad (2.25)$$

### 2.2.1 Potentiels de quelques systèmes simples

1. **Masse ponctuelle** : Ce cas est celui d'un potentiel keplerien :

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad ; \quad v_c(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad ; \quad v_e(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (2.26)$$

2. **Sphère homogène** : On a  $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$  avec la densité  $\rho$  constante, et :

$$v_c = \sqrt{\frac{4\pi G \rho}{3}} r \quad (2.27)$$

La vitesse circulaire est donc directement proportionnelle au rayon, si bien que la période orbitale d'une étoile-test en orbite circulaire est :

$$T = \frac{2\pi r}{v_c} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} \quad (2.28)$$

Il est intéressant de noter que cette période ne dépend que de la densité  $\rho$  mais pas du rayon.

Supposons qu'une étoile-test puisse se déplacer sans obstacle dans la sphère homogène en question. Si elle est lâchée de la distance au centre  $r$  avec une vitesse nulle, son équation du mouvement sera :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{4\pi G\rho}{3}r \quad (2.29)$$

Or c'est l'équation d'un oscillateur harmonique de fréquence  $2\pi/T$ . Ainsi, quelle que soit la position initiale  $r$ , l'étoile atteindra  $r = 0$  en un temps équivalent au quart d'une période, c'est-à-dire :

$$\sqrt{\frac{3\pi}{16G\rho}} = 0.767 (G\rho)^{-1/2} \quad (2.30)$$

Ce temps est très proche de l'inverse de la vitesse angulaire d'une masse en orbite circulaire :

$$\frac{1}{\omega} = \frac{r}{v_c} = \sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}} = 0.489 (G\rho)^{-1/2}$$

On voit donc que le temps qu'il faut pour parcourir une portion significative de l'orbite est toujours de l'ordre de  $(G\rho)^{-1/2}$ , que l'orbite soit radiale ou circulaire. Cela vaut aussi pour les systèmes inhomogènes, pour autant que l'on remplace  $\rho$  par la densité moyenne  $\bar{\rho}$  à l'intérieur du rayon  $r$ . On peut alors dire que le temps de traversée, ou **temps dynamique**, est égal à :

$$t_{cross} \simeq t_{dyn} \simeq (G\bar{\rho})^{-1/2} \quad (2.31)$$

A partir de l'Equ. (2.21), on trouve le potentiel gravitationnel de la sphère homogène :

$$\Phi(r) = \begin{cases} -2\pi G\rho (a^2 - \frac{1}{3}r^2) & (r < a) \\ -4\pi G\rho a^3/(3r) & (r > a) \end{cases} \quad (2.32)$$

3. **Modèle de Plummer** : C'est le modèle le plus simple, tel qu'il ne diverge pas au centre et décroisse en  $1/r$  (de manière keplerienne) aux grands rayons :

$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}} \quad (2.33)$$

où la constante  $b$  est la **longueur d'échelle de Plummer** et  $M$  est la masse totale du système. La densité correspondante est :

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi b^3} \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right)^{-5/2} \quad (2.34)$$

**Question - exercice :** Montrer la relation ci-dessus.

4. **Potentiel isochrone :** L'avantage du modèle de Plummer est sa simplicité, mais son défaut est que les orbites d'une étoile qui y évolue ne peuvent être écrites analytiquement. Ce défaut est corrigé dans le **potentiel isochrone** :

$$\Phi = -\frac{GM}{b + \sqrt{b^2 + r^2}} \quad (2.35)$$

Le nom de ce potentiel vient du fait que la période radiale du mouvement d'une étoile ne dépend que de l'énergie mécanique totale  $E$  mais pas du moment cinétique  $L$ , comme dans le cas d'une orbite keplerienne. La vitesse circulaire dans ce potentiel vaut :

$$v_c^2(r) = \frac{GMr^2}{(b+a)^2a} \quad \text{avec} \quad a \equiv \sqrt{b^2 + r^2} \quad (2.36)$$

**Question - exercice :** Montrer la relation ci-dessus.

si bien que  $v_c \rightarrow \sqrt{GM/r}$  quand  $r \gg b$ . A partir de l'équation de Poisson, la densité s'écrit :

$$\rho(r) = M \left[ \frac{3(b+a)a^2 - r^2(b+3a)}{4\pi(b+a)^3} \right] \quad (2.37)$$

**Question - exercice :** Montrer la relation ci-dessus.

Au centre,  $a = b$ , donc la densité centrale se réduit à :

$$\rho(0) = \frac{3M}{16\pi b^3} \quad (2.38)$$

tandis qu'aux grands rayons,  $a \simeq r \gg b$  et la densité tend vers :

$$\rho(r) \simeq \frac{bM}{2\pi r^4} \quad (r \gg b) \quad (2.39)$$

5. **Modèles de Dehnen, Hernquist, Jaffe et NFW** : La densité de luminosité  $j(\mathbf{r})$  (en  $L_\odot/pc^3$ ) suit souvent, pour les galaxies elliptiques, une loi de puissance donnée près du centre, mais une autre dans la périphérie. Plusieurs modèles pour lesquels la densité suit une loi du type :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/a)^\alpha (1 + r/a)^{\beta-\alpha}} \quad (2.40)$$

ont donc été proposés. Selon les valeurs de  $\beta$  et de  $\alpha$ , les modèles ont pris les noms suivants :

- Les **modèles de Dehnen** sont tous ceux pour lesquels  $\beta = 4$ , valeur qui leur donne des propriétés analytiques simples.  $\alpha$  peut prendre différentes valeurs, qui définissent différents sous-ensembles des modèles de Dehnen, en particulier :
- $\alpha = 1$  (et  $\beta = 4$ ) définit le **modèle de Hernquist**,
- $\alpha = 2$  (et  $\beta = 4$ ) définit le **modèle de Jaffe**. Les régions centrales des galaxies elliptiques sont bien ajustées par des modèles de Dehnen ayant  $0.6 \leq \alpha \leq 2$ .
- $\alpha = 1$  et  $\beta = 3$  définit le **modèle NFW** (Navarro, Frenk & White 1995), qui est particulièrement bien adapté aux **halos de matière noire** qui est très utilisé aujourd'hui. Bien que l'Equ. (2.40) contienne deux paramètres libres,  $\rho_0$  et  $a$ , les simulations de la formation des halos montrent que ces deux paramètres sont fortement corrélés, si bien que les modèles NFW ne dépendent en fait que d'un seul paramètre. Le paramètre habituellement utilisé est le rayon  $r_{200}$  où la densité vaut 200 fois la densité critique de l'univers  $\rho_c(t) = 3H^2(t)/(8\pi G)$ . Un autre paramètre possible est la masse  $M$  à l'intérieur de  $r_{200}$  :

$$M = 200\rho_c \frac{4}{3}\pi r_{200}^3$$

On définit la **concentration** du halo par

$$c \equiv r_{200}/a$$

Cette concentration présente une dispersion assez faible à  $M$  donnée. La valeur moyenne de  $c$  varie de  $\simeq 16$  pour  $M \sim 3 \times 10^{11} M_{\odot}$  à  $\simeq 6$  pour  $M \sim 3 \times 10^{15} M_{\odot}$ .

A partir de l'Equ. (2.40), on peut calculer la masse comprise à l'intérieur de  $r$  :

$$M(r) = 4\pi\rho_0 a^3 \int_0^{r/a} ds \frac{s^{2-\alpha}}{(1+s)^{\beta-\alpha}} \quad (2.41)$$

ce qui donne pour les modèles de Jaffe, Hernquist et NFW :

$$M(r) = 4\pi\rho_0 a^3 \times \begin{cases} \frac{r/a}{1+r/a} & \text{(Jaffe)} \\ \frac{(r/a)^2}{2(1+r/a)^2} & \text{(Hernquist)} \\ \ln(1+r/a) - \frac{r/a}{1+r/a} & \text{(NFW)} \end{cases} \quad (2.42)$$

On voit que la masse reste bornée quand  $r \rightarrow \infty$  pour les modèles de Jaffe et de Hernquist, mais qu'elle diverge dans le cas du modèle NFW. On peut calculer le potentiel en partant de l'Equ. (2.22), qui permet de poser pour les trois modèles :

$$\Phi = -G \int_r^{\infty} dr \frac{M(r)}{r^2}$$

Cela donne :

$$\Phi = -4\pi G \rho_0 a^2 \times \begin{cases} \ln(1+a/r) & \text{(Jaffe)} \\ \frac{1}{2(1+r/a)} & \text{(Hernquist)} \\ \frac{\ln(1+r/a)}{r/a} & \text{(NFW)} \end{cases} \quad (2.43)$$

## 2.3 Potentiel et densité des systèmes aplatis

Voici encore quelques potentiels simples, cette fois pour des systèmes aplatis.

### 2.3.1 Le modèle de Kuzmin et le modèle de Miyamoto & Nagai

Soit le potentiel axisymétrique :

$$\Phi_K(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}} \quad (a \geq 0) \quad (2.44)$$

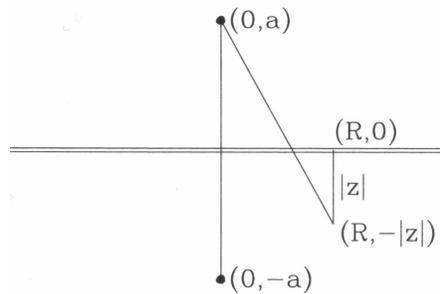


FIGURE 2.1 – Disque de Kuzmin vu par la tranche. On voit que, au point  $(R, -|z|)$  sous le plan du disque, le potentiel est identique à celui produit par une masse ponctuelle située à distance  $a$  au-dessus du centre du disque.

On voit d'après la Fig. (2.1) que, pour  $z < 0$ , le potentiel  $\Phi_K$  est identique à celui d'une masse ponctuelle qui serait située au point  $(R, z) = (0, a)$ . De même, pour  $z > 0$ , le potentiel est identique à celui d'une masse ponctuelle qui serait située en  $(R, z) = (0, -a)$ . Par conséquent, tant que  $z \neq 0$ , la densité doit être nulle partout sauf en  $(0, \pm a)$ , de même que  $\nabla^2 \Phi_K$ . La matière doit donc être confinée dans un disque infiniment mince. Il est possible de calculer la densité de surface  $\Sigma_K$  en recourant au théorème de Gauss donné par l'Equ. (2.12) et en intégrant sur la surface d'un volume englobant une unité de surface du disque et d'épaisseur tendant vers zéro. On obtient alors :

$$\Sigma_K(R) = \frac{aM}{2\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2.45)$$

**Question - exercice :** Montrer la relation ci-dessus.

Une généralisation du potentiel de Kuzmin permet de traiter des systèmes sphériques aussi bien que plats, ainsi que tous les cas intermédiaires. C'est le **potentiel de Miyamoto & Nagai** (1975), une sorte d'hybride entre les potentiels de Plummer et de Kuzmin :

$$\Phi_M(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}} \quad (2.46)$$

Ce potentiel devient celui de Plummer pour  $a = 0$  (avec  $r^2 = R^2 + z^2$ ), tandis qu'il se réduit à celui de Kuzmin pour  $b = 0$ . C'est en jouant sur les paramètres  $a$  et  $b$  que l'on peut passer par les situations intermédiaires. La densité correspondante, obtenue à partir de  $\nabla^2\Phi_M$ , s'écrit :

$$\rho_M(R, z) = \left(\frac{b^2 M}{4\pi}\right) \frac{aR^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2})(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}{[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{5/2}(z^2 + b^2)^{3/2}} \quad (2.47)$$

Les contours d'égalité de densité sont montrés dans la Fig. (2.2).

### 2.3.2 Equation de Poisson pour les systèmes très aplatis

Dans le cas d'un système axisymétrique ayant une densité  $\rho(R, z)$ , l'équation de Poisson peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 4\pi G\rho(R, z) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(RF(R)) \quad (2.48)$$

où  $F_R = -\partial\Phi/\partial R$  est la force radiale. Considérons un modèle comme celui de Miyamoto & Nagai : si  $b \rightarrow 0$ , la distribution de densité devient plus aplatie, et en  $R$  donné, la densité dans le plan croît comme  $1/b$ . Mais la force radiale  $F_R$  reste bornée : à la limite  $b = 0$ , on a  $F_R = -\partial\Phi_K/\partial R$ , où  $\Phi_K(R, z)$  est le potentiel de Kuzmin. Donc, près de  $z = 0$ , le premier terme du membre de droite de l'Equ. (2.48) devient beaucoup plus grand que le second, si bien que l'équation de Poisson se réduit à :

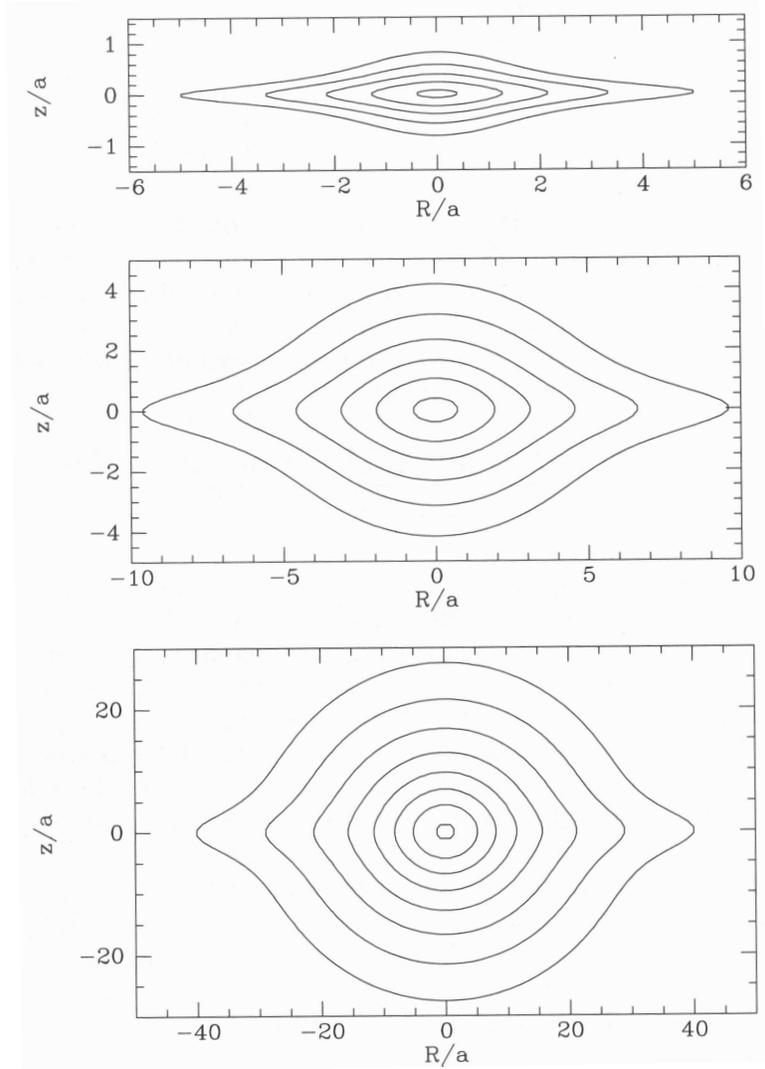


FIGURE 2.2 – Contours de densité du modèle de Miyamoto–Nagai dans le plan  $(R, z)$ , pour différents rapports  $b/a$  : en haut,  $b/a = 0.2$  ; milieu,  $b/a = 1$  ; bas,  $b/a = 5$ . (Source : Binney & Tremaine 2008).

$$\frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial z^2} = 4\pi G\rho(R, z) \quad (2.49)$$

Ce résultat n'est pas limité à un modèle particulier, mais reste valable pour pratiquement tout système en forme de disque fin. La variation verticale du potentiel, en un rayon  $R$  donné, ne dépend que de la distribution de densité en ce rayon. On peut donc résoudre l'équation de Poisson en deux étapes :

- 1) assimiler le disque fin à une couche d'épaisseur nulle et déterminer le potentiel  $\Phi(R, 0)$  dans le plan du disque (à l'aide des modèles présentés ici, par exemple) ;
- 2) résoudre l'Equ. (2.49) en chaque rayon  $R$  pour trouver la dépendance en  $z$  de  $\Phi(R, z)$ .

On a alors :

$$\Phi(R, z) = \Phi(R, 0) + \Phi_z(R, z) \quad (2.50)$$

avec :

$$\Phi_z(R, z) \equiv 4\pi G \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' \rho(R, z'') + a(R)z \quad (2.51)$$

et avec la constante d'intégration  $a$  étant nulle si le disque est symétrique par rapport au plan équatorial.

## 2.4 Les potentiels des disques

Les galaxies pourvues d'un disque prédominant étant très fréquentes, il est utile de voir plus en détail comment calculer le potentiel de disques très fins. On en verra ici deux exemples, le disque de Mestel et le disque exponentiel.

### 2.4.1 Potentiels de disques à partir d'homoéoïdes

Un homoéoïde est une "couche" de densité de surface uniforme délimitée par deux surface sphéroïdes concentriques. Les homoéoïdes fins ont un potentiel extérieur dont les équipotentielles sont des sphéroïdes qui ont les mêmes foyers que l'homoéoïde, et un potentiel intérieur constant. On peut ainsi calculer les potentiels de distributions de masses sphéroïdales arbitraires. Un disque axisymétrique peut être considéré comme un sphéroïdes très aplati. On donnera ici les étapes essentielles de cette méthode, sans les justifier dans tous les détails.

Considérons le sphéroïde homogène de densité  $\rho$ , de demi-axes  $a$  et  $c = qa$  représenté sur la Fig. (2.3).

Sa masse est  $M = \frac{4}{3}\pi \rho qa^3$ , et sa densité de surface est, comme on le voit sur cette figure :

$$\Sigma(a, R) = 2\rho q \sqrt{a^2 - R^2} \quad (2.52)$$

où  $R$  est le rayon en coordonnées cylindriques. On obtient la masse  $\delta M(a)$  et la densité de surface  $\delta \Sigma(a, R)$  de l'homoéoïde mince de densité  $\rho$ , de demi-grand axe  $a$ , d'épaisseur  $\delta a$  et de rapport d'axes  $q$ , en différentiant l'Equ. (2.52) :

$$\delta M(a) = 4\pi \rho q a^2 \delta a \quad ; \quad \delta \Sigma(a, R) = \frac{2\rho q a}{\sqrt{a^2 - R^2}} \delta a \quad (2.53)$$

Faisons maintenant tendre  $q$  vers zéro tout en gardant la densité de surface  $\Sigma_0 \equiv 2\rho q a$  constante : on obtient la masse et la densité de surface d'un homoéoïde aplati :

$$\delta M(a) = 2\pi \Sigma_0 a \delta a \quad ; \quad \delta \Sigma(a, R) = \frac{\Sigma_0 \delta a}{\sqrt{a^2 - R^2}} \quad (2.54)$$

Supposons que l'on connaisse – ou que l'on impose –  $\Sigma(R)$ . On peut construire un disque fin en superposant des homoéoïdes dont les densités de surface cumulées donnent  $\Sigma(R)$  pour chaque  $R$  :

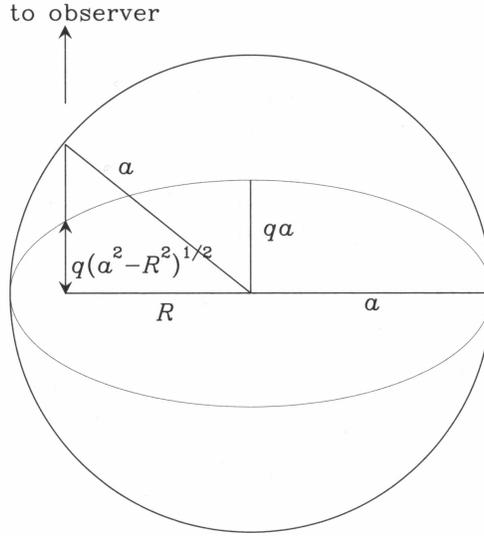


FIGURE 2.3 – Un sphéroïde de rapport des axes égal à  $q$  et de demi-grand axe  $a$  est vu le long d'une ligne de visée qui coupe le plan équatorial du sphéroïde, perpendiculairement, au rayon  $R$ . Cette ligne de visée coupe à travers le sphéroïde sur une distance égale à  $2q\sqrt{a^2 - R^2}$ .

$$\Sigma(R) = \sum_{a \geq R} \delta\Sigma(a, R) = \int_R^\infty da \frac{\Sigma_0(a)}{\sqrt{a^2 - R^2}} \quad (2.55)$$

On intègre de  $R$  à l'infini parce que les homoéïdes ayant  $a < R$  ne contribuent évidemment pas à la densité de surface en  $R$ . Il s'agit donc de trouver la fonction  $\Sigma_0(a)$  à partir de cette équation intégrale, qui est une équation intégrale d'Abel. La solution en est :

$$\Sigma_0(a) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{da} \int_a^\infty dR \frac{R \Sigma(R)}{\sqrt{R^2 - a^2}} \quad (2.56)$$

Il est important de voir que la fonction  $\Sigma_0(a)$  diffère de la fonction  $\Sigma(R)$  parce qu'une partie de la masse située à l'intérieur du rayon  $R$  appartient à des homoéïdes ayant  $a > R$ .

**Troisième théorème de Newton :** *Une masse située à l'intérieur d'un homoéïde ne subit aucune force gravitationnelle nette de la part de celui-ci.*

En vertu de ce théorème, la force de gravité subie par le point situé en  $(R', 0)$  est indépendante des homoéoïdes ayant  $a > R$ . Par contre, ces derniers contribuent à la masse interne à  $R$ , si bien que, à la limite du disque fin, la force subie en  $R$  ne dépend pas seulement de la masse du disque intérieure à  $R$ , mais aussi de la masse extérieure à  $R$ . Cela contraste avec la situation de symétrie sphérique, où la force subie en  $R$  ne dépend que de la masse située à l'intérieur de  $R$ . Dans le cas du disque, l'anneau  $R' > R$  contribue à la gravité subie par une étoile située en  $R$ , en exerçant sur elle une force vers l'extérieur, de sorte à compenser partiellement l'attraction centripète exercée par la matière située en  $R' < R$ . Ainsi, une étoile située au bord d'un disque de masse donnée subit une force supérieure à celle qu'elle subirait à la périphérie d'un système sphérique de même masse, et sa vitesse circulaire est donc supérieure. On peut comprendre ce dernier fait de manière intuitive : en partant d'un système sphérique de rayon et de masse donnés, on l'aplatit progressivement en un disque de même masse et de même rayon. Les éléments de masse qui étaient initialement situés dans les régions polaires de la sphère exerçaient, sur l'étoile située à l'équateur, des forces dont les composantes verticales s'annulaient ; ces éléments de masse, une fois ramenés dans la région centrale du disque, exercent sur l'étoile une force qui, non seulement, est purement radiale, mais qui a aussi une intensité plus grande, vu qu'elle est plus proche d'un facteur  $\sqrt{2}$ .

Pour calculer le potentiel, remarquons d'abord que, contrairement au champ de gravitation qui est discontinu sur le plan (il change de direction entre  $z = +\varepsilon$  et  $z = -\varepsilon$ ), le potentiel reste continu. Il suffit donc de calculer le potentiel qui règne à l'extérieur de tous les homoéoïdes, puis de faire tendre  $z$  vers zéro.

Le potentiel à l'intérieur d'un homoéoïde de masse  $M$  est donné en coordonnées sphéroïdales oblates  $u$  et  $v$ , définies par :

$$R = \Delta \cosh u \sinh v \quad ; \quad z = \Delta \sinh u \cosh v \quad \text{avec} \quad u \geq 0, \quad 0 \leq v \leq \pi \quad (2.57)$$

où  $\Delta$  est une constante.  $u$  est la coordonnée "radiale", c'est-à-dire que les courbes  $u = \text{constante}$  sont, dans le plan  $(R, z)$ , des ellipses confocales mais de différents demi-grands axes  $a$ . Dans ces coordonnées, le potentiel s'écrit :

$$\Phi = -\frac{G\delta M}{ae} \times \begin{cases} \arcsin(e) & (u < u_0) \\ \arcsin(\operatorname{sech} u) & (u \geq u_0) \end{cases} \quad (2.58)$$

Pour un homoéioïde complètement aplati, l'excentricité vaut  $e = 1$  et en exprimant la masse en fonction de  $\Sigma_0$  par l'Equ. (2.53), le potentiel devient :

$$\delta\Phi(R, z) = -2\pi G\Sigma_0\delta a \arcsin(\operatorname{sech} u) \quad (2.59)$$

Des calculs un peu longs permettent d'arriver à l'expression du potentiel :

$$\Phi(R, z) = 4G \int_0^\infty da \arcsin\left(\frac{2a}{\sqrt{+} + \sqrt{-}}\right) \frac{d}{da} \int_a^\infty dR' \frac{R'\Sigma(R')}{\sqrt{R'^2 - a^2}} \quad (2.60)$$

avec :

$$\sqrt{\pm} \equiv \sqrt{z^2 + (a \pm R)^2}$$

Pour le potentiel dans le plan, cette expression se réduit à :

$$\Phi(R, 0) = -4G \int_0^R \frac{da}{\sqrt{R^2 - a^2}} \int_0^\infty dR' \frac{R'\Sigma(R')}{\sqrt{R'^2 - a^2}} \quad (2.61)$$

La vitesse circulaire est :

$$v_c^2(R) = R \frac{\partial\Phi}{\partial R} = -4G \int_0^R da \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}} \frac{d}{da} \int_a^\infty dR' \frac{R'\Sigma(R')}{\sqrt{R'^2 - a^2}} \quad (2.62)$$

## 2.4.2 Le disque de Mestel

Ce disque possède la curieuse propriété de donner une vitesse circulaire constante, indépendante du rayon. Considérons d'abord une densité de surface donnée par :

$$\Sigma(R) = \begin{cases} \frac{v_0^2}{2\pi GR} & (R < R_{max}) \\ 0 & (R \geq R_{max}) \end{cases} \quad (2.63)$$

où  $v_0$  et  $R_{max}$  sont des constantes. La dernière intégrale de l'Equ. (2.62) est proportionnelle à  $\operatorname{arccosh}(R_{max}/a)$ , et sa dérivée est :

$$\frac{d}{da} \operatorname{arccosh}(R_{max}/a) = -\frac{R_{max}}{a\sqrt{R_{max}^2 - a^2}} \quad (2.64)$$

Faisons tendre  $R_{max}$  vers l'infini, ce qui définit le **disque de Mestel** : la dérivée ci-dessus devient  $-1/a$  qui, introduite dans l'Equ. (2.62), donne :

$$v_c^2 = \frac{2v_0^2}{\pi} \int_0^R \frac{da}{\sqrt{R^2 - a^2}} = v_0^2 \quad (2.65)$$

Par ailleurs, pour cette densité de surface inversement proportionnelle au rayon, la vitesse circulaire peut s'écrire :

$$v_c^2(R) = \frac{GM(R)}{R} \quad (2.66)$$

avec

$$M(R) = 2\pi \int_0^R dR' R' \Sigma(R') = \frac{v_0^2 R}{G} \quad (2.67)$$

L'équation pour  $v_c^2$  est, exceptionnellement, la même que pour un système sphérique ! Seul le disque de Mestel offre cette particularité.

### 2.4.3 Le disque exponentiel

On a vu que les galaxies spirales réelles possèdent ce type de loi de densité. Déterminons le potentiel correspondant à la densité de surface :

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/R_d} \quad (2.68)$$

On peut montrer que l'intégrale de droite dans l'Equ. (2.62) (par exemple) peut s'écrire :

$$\int_a^\infty dR' \frac{R' \Sigma_0 e^{-R'/R_d}}{\sqrt{R'^2 - a^2}} = \Sigma_0 a K_1(a/R_d) \quad (2.69)$$

où  $K_1$  est une fonction de Bessel modifiée. En introduisant cela dans l'Equ. (2.61), on a :

$$\Phi(R, 0) = -4G\Sigma_0 \int_0^R da \frac{a K_1(a/R_d)}{\sqrt{R^2 - a^2}} \quad (2.70)$$

$$= -\pi G \Sigma_0 R [I_0(y) K_1(y) - I_1(y) K_0(y)] \quad (2.71)$$

avec

$$y \equiv \frac{R}{2R_d} \quad (2.72)$$

et où  $I_0$  et  $I_1$  sont des fonctions de Bessel modifiées. La vitesse circulaire est donnée par :

$$v_c^2 = R \frac{\partial \Phi}{\partial R} = 4\pi G \Sigma_0 R_d y^2 [I_0(y)K_0(y) - I_1(y)K_1(y)] \quad (2.73)$$

La Fig. (2.4) montre cette vitesse circulaire, ainsi que celle d'un système sphérique ayant la même loi  $M_s(r)$  que le disque exponentiel, à savoir :

$$\begin{aligned} M_s(R) = M_d(R) &= 2\pi \int_0^R dR' R' \Sigma_0 e^{-R'/R_d} \\ &= 2\pi \Sigma_0 R_d^2 \left[ 1 - e^{-R/R_d} \left( 1 + \frac{R}{R_d} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.74)$$

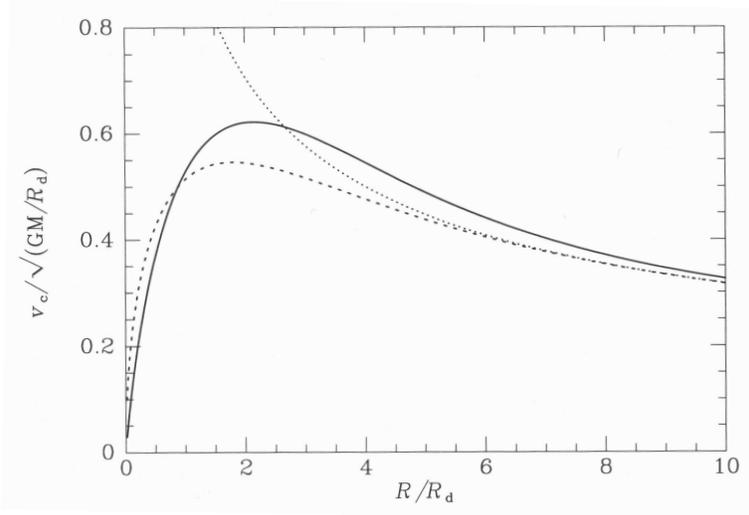


FIGURE 2.4 – Vitesse circulaire du disque exponentiel (courbe continue), d'une masse ponctuelle de même masse que le disque (courbe pointillée) et du système sphérique dont la distribution de masse est donnée par l'Equ. (2.74) (courbe traitillée).

On voit que la vitesse circulaire du disque n'approche la courbe keplerienne que lentement.

## 2.5 Le potentiel de notre Galaxie

La Galaxie est une superposition de plusieurs composantes (le disque, le bulbe, le halo stellaire et le halo de matière noire) et il n'est pas possible de déduire le potentiel des seuls observables dynamiques. On fait en particulier l'hypothèse que chaque composante possède un rapport masse/luminosité  $\Upsilon$  différent mais indépendant de la position. Cette approche n'est pas satisfaisante, mais elle permet de construire des potentiels Galactiques qui permettent de tester leurs prédictions concernant les cinématiques des étoiles et du gaz.

Les données utilisables sont :

1. La vitesse circulaire  $v_c(R)$ , compte tenu d'une vitesse circulaire du Soleil  $v_0 \equiv v_c(R_0)$  obtenue indépendamment.
2. Les valeurs des constantes de Oort (cf. cours d'Introduction).
3. La densité de surface totale (jusqu'à env. 1,1 kpc) du plan Galactique au niveau du Soleil,  $\Sigma_{1,1}(R_0)$ .
4. La dispersion des vitesses des étoiles du bulbe dans la fenêtre de Baade, qui vaut  $117 \pm 15 \text{ km s}^{-1}$ .
5. La masse totale jusqu'à 100 kpc du centre Galactique.
6. Le rayon de l'orbite solaire  $R_0 = 8 \text{ kpc}$ .

La forme de la loi de densité pour chaque composante est la suivante :

### a) Le bulbe :

$$\rho_b(R, z) = \rho_{b0} \left( \frac{m}{a_b} \right)^{-\alpha_b} e^{-m^2/r_b^2} \quad (2.75)$$

avec :

$$m = \sqrt{R^2 + z^2/q_b^2} \quad (2.76)$$

Pour  $q_b < 1$ , c'est un sphéroïde oblat tronqué au rayon extérieur  $r_b$ . Les paramètres  $\alpha_b = 1.8$ ,  $q_b = 0.6$ ,  $r_b = 1.9 \text{ kpc}$  et  $a_b = 1 \text{ kpc}$ .

**b) Le halo de matière noire :** On adopte un modèle de Dehnen généralisé aux sphéroïdes oblates :

$$\rho_h(R, z) = \rho_{h0} \left( \frac{m}{a_h} \right)^{-\alpha_h} \left( 1 + \frac{m}{a_h} \right)^{\alpha_h - \beta_h} \quad (2.77)$$

$m$  étant donné par l'Equ. (2.76), où l'on a remplacé  $q_b$  par  $q_h$ . La densité varie donc comme  $r^{-\alpha_h}$  pour  $r \ll a_h$  et comme  $r^{-\beta_h}$  aux grandes valeurs de  $r$ . Il y a cinq paramètres :  $\rho_{h0}$ ,  $a_h$ ,  $\alpha_h$ ,  $\beta_h$  et  $q_h$ . Ce dernier paramètre est mal contraint par les données, qu'elles soient photométriques ou dynamiques, et on pose arbitrairement  $q_h = 0.8$ . Les quatre autres paramètres sont ajustés à l'aide des contraintes dynamiques.

**c) Le disque stellaire :** On a vu que le disque comporte deux composantes, le disque fin et le disque épais. On superpose donc deux exponentielles d'échelles de hauteur différentes :

$$\rho_d(R, z) = \Sigma_d e^{-R/R_d} \left( \frac{\alpha_0}{2z_0} e^{-|z|/z_0} + \frac{\alpha_1}{2z_1} e^{-|z|/z_1} \right) \quad (2.78)$$

avec  $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$ .  $\Sigma_d$  est la densité de surface au centre,  $R_d$  est la taille caractéristique du disque;  $z_0 = 0.3$  kpc et  $z_1 = 1$  kpc sont les échelles de hauteur du disque fin et du disque épais, respectivement.

**d) Le disque de matière interstellaire :** Le disque de matière interstellaire est plus fin que le disque stellaire, et il s'étend plus loin en rayon. Par contre, il présente un trou de 4 kpc de rayon au centre de la Galaxie. Sa densité est approchée par la formule :

$$\rho_g(R, z) = \frac{\Sigma_g}{2z_g} \exp \left( -\frac{R}{R_g} - \frac{R_m}{R} - \frac{|z|}{z_g} \right) \quad (2.79)$$

avec  $R_m = 4$  kpc et  $z_g = 80$  pc. On admet que  $R_g = 2R_d$  et que la matière interstellaire contribue pour 25% à la densité de surface totale du disque au niveau du Soleil, c'est-à-dire au rayon  $R_0$ . Compte tenu de cela,  $\Sigma_g$  et  $R_g$  sont liés à  $\Sigma_d$  et  $R_d$  par l'Equ. (2.78).

Un modèle de la Galaxie qui satisfait les contraintes d'observations en superposant les composantes a) à d) est dégénéré, en ce sens que plusieurs combinaisons (une infinité, même) de paramètres donnent des ajustements modèles-observations également satisfaisants. Le paramètre le plus important est  $R_d$ , qui est de l'ordre de 2 à 3 kpc : pour  $R_d = 2$  kpc, le disque domine le champ de gravitation jusqu'au delà du Soleil, tandis que pour  $R_d = 3$  kpc, c'est le halo qui domine partout. La Fig. (2.5) (qui reproduit en fait la Table (2.3) de Binney & Tremaine 2008) donne la valeur des paramètres de deux modèles extrêmes, appelés Modèle I et Modèle II.

Dans le Modèle I, on adopte  $R_d = 2$  kpc et la densité du halo croît, près du centre, comme  $\rho_h \propto r^{-\alpha_h} = r^2$ . Cela donne la plus faible contribution

**Table 2.3** Parameters of Galaxy models

Parameter	Model I	Model II
$R_d/\text{kpc}$	2	3.2
$(\Sigma_d + \Sigma_g)/\mathcal{M}_\odot \text{pc}^{-2}$	1905	536
$\rho_{b0}/\mathcal{M}_\odot \text{pc}^{-3}$	0.427	0.3
$\rho_{h0}/\mathcal{M}_\odot \text{pc}^{-3}$	0.711	0.266
$\alpha_h$	-2	1.63
$\beta_h$	2.96	2.17
$a_h/\text{kpc}$	3.83	1.90
$M_d/10^{10} \mathcal{M}_\odot$	5.13	4.16
$M_b/10^{10} \mathcal{M}_\odot$	0.518	0.364
$M_{h,<10 \text{ kpc}}/10^{10} \mathcal{M}_\odot$	2.81	5.23
$M_{h,<100 \text{ kpc}}/10^{10} \mathcal{M}_\odot$	60.0	55.9
$v_e(R_0)/\text{km s}^{-1}$	520	494
$f_b$	0.05	0.04
$f_d$	0.60	0.33
$f_h$	0.35	0.63

NOTES: In both models  $0.75\Sigma(R_0)$  is contributed by stars, of which  $0.05\Sigma(R_0)$  is in the thick disk. Interstellar gas accounts for the remaining  $0.25\Sigma(R_0)$ . The thin and thick disks have the same scale length  $R_d$ , while the gas disk has scale length  $2R_d$  and a central hole of radius  $R_m = 4 \text{ kpc}$ . The thicknesses of the disks are  $z_0 = 300 \text{ pc}$ ,  $z_1 = 1 \text{ kpc}$ ,  $z_g = 80 \text{ pc}$ . In both models the bulge parameters are  $a_b = 1 \text{ kpc}$ ,  $\alpha_b = 1.8$ ,  $r_b = 1.9 \text{ kpc}$ ,  $q_b = 0.6$ , while the halo axis ratio  $q_h = 0.8$ . The quantity  $v_e(R_0)$  is the escape speed from the solar neighborhood;  $f_b$ ,  $f_d$  and  $f_h$  are the fractions of the radial force supplied by bulge, disk and halo at  $R_0 = 8 \text{ kpc}$ . These are slightly modified forms of Models 1 and 4 of Dehnen & Binney (1998a).

FIGURE 2.5 – Paramètres des Modèle I et Modèle II de la Galaxie (Binney & Tremaine 2008).

possible du halo près du centre, pour l'échelle de longueur du disque donnée. Les propriétés des deux modèles sont illustrées par les Figures (2.6) et (2.7), qui montrent les potentiels produit par les différentes composantes, et par la Fig. (2.8) qui montre les vitesses circulaires correspondantes. La force verticale  $K_z$  est aussi montrée à la Fig. (2.9).

Dans le Modèle I, le disque domine le champ de gravitation (gradient du potentiel) au niveau du Soleil, mais c'est le halo qui contribue le plus au potentiel lui-même, et cela partout. Cela est dû à la très grande masse du halo, qui est mal connue en fait, la courbe de rotation étant inconnue au-delà de  $\sim 2R_0$ .

Dans le Modèle II, le halo domine la courbe de rotation partout, à cause du fait qu'il est beaucoup plus concentré que dans le Modèle I.

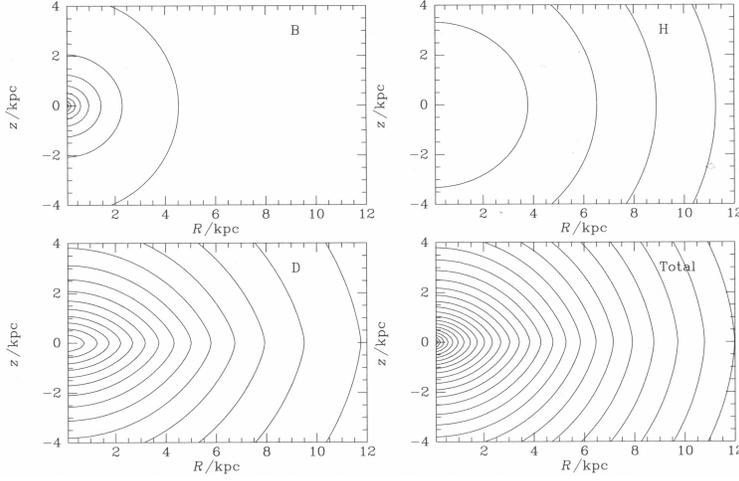


FIGURE 2.6 – Contours équipotentiels dans le plan  $(R, z)$  pour le Modèle I de la galaxie ( $R_d = 2$  kpc). Les équipotentiels sont données pour le bulbe (en haut à gauche), le halo (en haut à droite), le disque (en bas à gauche) et le modèle complet (en bas à droite). Les contours sont donnés pour les valeurs  $(-0.5, -1, -1.5\dots) \times (100 \text{ km s}^{-1})^2$ , et la valeur du potentiel à la position du Soleil  $(R, z) = (8 \text{ kpc}, 0)$  est, d'en haut à gauche à droite en bas,  $-0.28, -10.2, -2.98$  et  $-13.46 \times (100 \text{ km s}^{-1})^2$ , respectivement.

Il est important de voir à quel point les contributions respectives du disque et du halo à la masse intérieure à  $R_0$  et à la vitesse circulaire en  $R_0$ , sont incertaines. Il y a une sorte de dégénérescence entre les paramètres du disque et du halo.

La force verticale est dominée par le disque en deçà de  $\sim 2$  kpc du plan, comme le montre la Fig. 2.9. La contribution du disque à  $K_z$  croît très vite quand on s'éloigne de celui-ci, pour atteindre un plateau dont la valeur est de l'ordre de  $2\pi G\Sigma(R)$ . Au contraire, la contribution du halo augmente presque linéairement, jusqu'à plusieurs kiloparsecs du plan. Il est intéressant de remarquer que la courbe de  $K_z$  est presque identique pour le Modèle I et pour le Modèle II, malgré les différences de contributions du disque et du halo.

**e) La barre centrale, un bulbe particulier :** Les observations suggèrent que, au lieu d'un bulbe axisymétrique, la Galaxie comporte une barre dont le demi-grand axe a 3 kpc et forme un angle de  $20^\circ$  par rapport à la direction du Soleil (Fig. 2.10). Si l'on approxime cette barre à l'aide d'un ellipsoïde oblat,

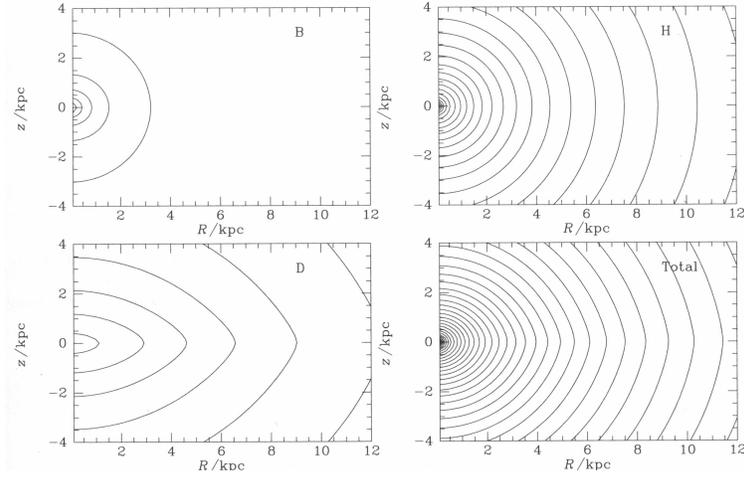


FIGURE 2.7 – Idem à la Fig. 2.6, mais pour le Modèle II.

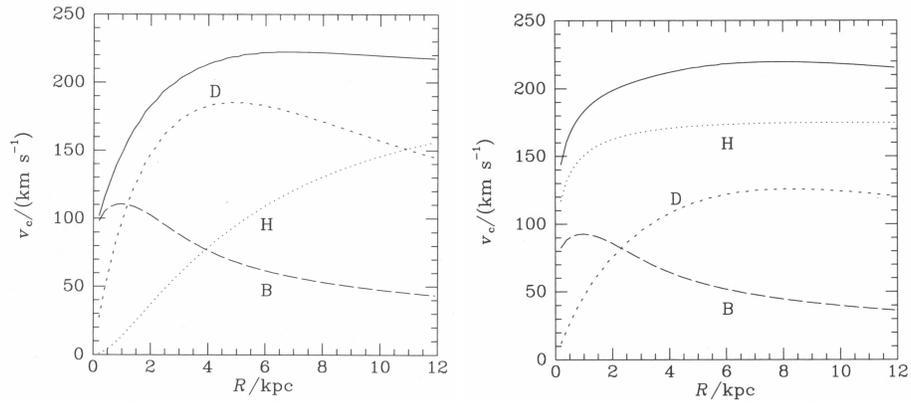


FIGURE 2.8 – Courbe de rotation circulaire (courbe continue) du Modèle I (à gauche) et du Modèle II (à droite). Les contribution respectives du bulbe, du disque et du halo sont montrées par les courbes désignées par B, D et H. La vitesse circulaire totale est la somme quadratique des vitesses des diverses composantes.

ses axes sont dans les rapports 1 : 0.3 : 0.3. Le potentiel peut être calculé en augmentant, dans les Equations (2.75) et (2.76), le rayon  $r_c$  de 1.9 à 3 kpc et

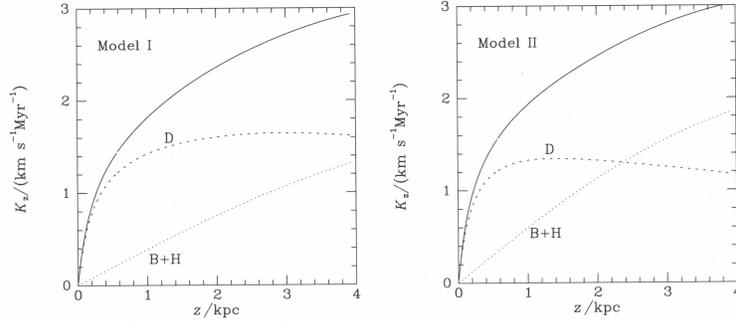


FIGURE 2.9 – Force verticale  $K_z = \partial\Phi/\partial z$  en  $R_0 = 8$  kpc pour le Modèle I (à gauche) et pour le Modèle II (à droite). Les contributions du disque et du bulbe+halo sont les courbes désignées par D et B+H, respectivement.

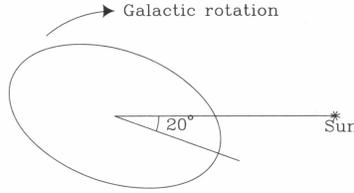


FIGURE 2.10 – Schéma représentant la position de la barre de la Galaxie en projection sur le plan Galactique.

en redéfinissant  $m$  comme étant  $m^2 = x^2 + (y^2 + z^2)/q^2$ , où  $x$  est la coordonnée le long de la direction du grand axe de la barre. On adopte  $q = 0.35$  et on augmente  $\rho_0$  de sorte que la barre ait la même masse que le bulbe initial. La Fig. 2.11 montre les équipotentielles produites par la barre dans le plan Galactique, comparées à celles dues à un bulbe axisymétrique. On voit que la différence est négligeable au niveau du Soleil, mais très sensible en deçà de 5 kpc. Par conséquent, la force tangentielle est importante dans les régions centrales par rapport à la force radiale, et la dynamique de la Galaxie est fortement affectée par la barre dans les régions avec  $R \lesssim 2 - 3$  kpc.

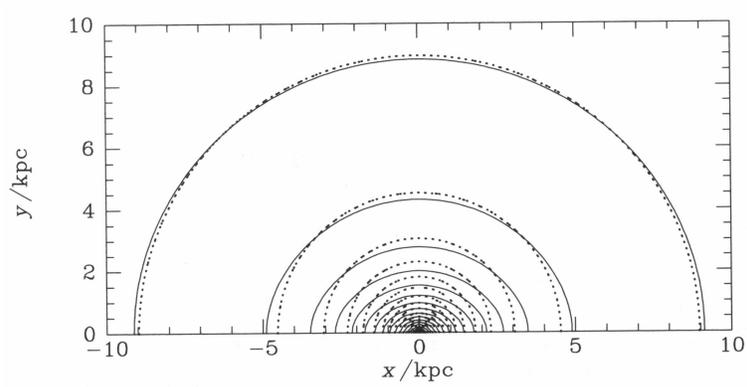


FIGURE 2.11 – Equipotentielles dues à la barre dans le plan Galactique, pour le Modèle I (courbes continues) et à un bulbe axisymétrique (courbes pointillées).