
LE TEST ET SON CORRIGÉ

Exercice 1. (5 pts)

Expliquer la notion de courbure orientée.

Corrigé :

La notion de courbure orientée concerne les courbes planaires, c'est à dire des courbes se trouvant dans $\mathbb{R}^2$. De plus, pour pouvoir parler de courbure orientée ces courbes doivent être régulières, c'est à dire dérivable et avec un vecteur tangent non nul au point où l'on calcul.

Pour une telle courbe $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, on définit la courbure orientée $k(c, t)$ au point $c(t)$ comme étant la quantité

$$k(c, t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$$

où $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction angulaire (une fonction continue qui exprime l'angle entre le vecteur tangent et le vecteur e_1). En valeur absolue elle correspond à la courbure habituelle mais elle peut être négative. Si elle est positive cela signifie que la courbe tourne dans le sens trigonométrique et si elle est négative cela signifie qu'elle tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

On peut aussi remarquer d'autres choses sur la courbure orientée, comme par exemple le fait que l'inverse de sa valeur, si elle est non-nulle, correspond, au signe près, au rayon du cercle de courbure. Donc il faut prendre le corrigé au dessus comme un exemple d'une bonne réponse mais pas la seule réponse possible.

Exercice 2. (15 pts)

On considère la courbe régulière $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{2}e^t \sin(t) - 2\sqrt{2}, \sqrt{2}e^t \sin(t) + 4\sqrt{2}, 2e^t \cos(t) \right), \quad t \in I.$$

où $I = [0, \ln(12)]$.

- Calculer la longueur de la courbe γ .
- Donner le repère de Frenet $\{\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)\}_{\gamma(t)}$ de la courbe γ .
- Calculer la courbure $\kappa(\gamma, t)$ et la torsion $\tau(\gamma, t)$ de la courbe γ au point $\gamma(t)$.

Corrigé :

- La longueur l de la courbe γ est donnée par

$$l = \int_0^{\ln(12)} \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

On a

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\sqrt{2}e^t (\sin(t) + \cos(t)), \sqrt{2}e^t (\sin(t) + \cos(t)), 2e^t (\cos(t) - \sin(t)) \right).$$

Il vient

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 &= 2e^{2t} (2(\sin(t) + \cos(t))^2 + 2(\cos(t) - \sin(t))^2) \\ &= 2e^{2t} (4(\cos^2(t) + \sin^2(t))) \\ &= 8e^{2t}, \end{aligned}$$

d'où $\|\dot{\gamma}(t)\| = 2\sqrt{2}e^t$. On obtient

$$l = \int_0^{\ln(12)} 2\sqrt{2}e^t dt = 2\sqrt{2} [e^t]_0^{\ln(12)} = 2\sqrt{2}(12 - 1) = 22\sqrt{2}.$$

- Les vecteurs $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ et $\mathbf{B}(t)$ du repère de Frenet de la courbe γ au point $\gamma(t)$ sont donnés par

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}, \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(t)}{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \wedge \mathbf{N}(t).$$

Calculons $\mathbf{T}(t)$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}e^t} \left(\sqrt{2}e^t (\sin(t) + \cos(t)), \sqrt{2}e^t (\sin(t) + \cos(t)), 2e^t (\cos(t) - \sin(t)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin(t) + \cos(t), \sin(t) + \cos(t), \sqrt{2}(\cos(t) - \sin(t)) \right). \end{aligned}$$

Calculons $\mathbf{N}(t)$. On a

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \frac{1}{2} \left(\cos(t) - \sin(t), \cos(t) - \sin(t), -\sqrt{2}(\sin(t) + \cos(t)) \right).$$

Il vient

$$\begin{aligned}\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|^2 &= \frac{1}{4} (2(\cos(t) - \sin(t))^2 + 2(\sin(t) + \cos(t))^2) \\ &= \frac{1}{4} (4(\cos^2(t) + \sin^2(t))) \\ &= 1,\end{aligned}$$

d'où $\|\dot{\mathbf{T}}(t)\| = 1$. On obtient

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(t)}{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|} = \frac{1}{2} \left(\cos(t) - \sin(t), \cos(t) - \sin(t), -\sqrt{2}(\sin(t) + \cos(t)) \right).$$

Enfin, calculons $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \wedge \mathbf{N}(t)$. Posons $\mathbf{B}(t) = (B_1(t), B_2(t), B_3(t))$. On a

$$\begin{aligned}B_1(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{4} ((\sin(t) + \cos(t))^2 + (\cos(t) - \sin(t))^2) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} (2(\cos^2(t) + \sin^2(t))) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ B_2(t) &= \frac{\sqrt{2}}{4} ((\sin(t) + \cos(t))^2 + (\cos(t) - \sin(t))^2) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (2(\cos^2(t) + \sin^2(t))) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_3(t) &= \frac{1}{4} ((\sin(t) + \cos(t))(\cos(t) - \sin(t)) - (\sin(t) + \cos(t))(\cos(t) - \sin(t))) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{B}(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$.

c) Calculons la courbure $\kappa(\gamma, t)$ et la torsion $\tau(\gamma, t)$ de la courbe γ au point $\gamma(t)$. On a

$$\kappa(\gamma, t) = \frac{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}e^t} = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-t}$$

et

$$\tau(\gamma, t) = -\frac{\langle \dot{\mathbf{B}}(t), \mathbf{N}(t) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = -\frac{\langle \mathbf{0}, \mathbf{N}(t) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = 0.$$

Exercice 3. (15 pts)

On considère la droite D passant par les points $p = (2, 3)$ et $q = (6, 0)$, ainsi que la symétrie σ_D par rapport à D .

a) Trouver $A \in O(2)$ et $b \in \mathbb{R}^2$ tels que:

$$\sigma_D(x) = Ax + b.$$

b) Imaginons que le segment $[p, q]$ soit un miroir. Un observateur situé au point $(5, 7)$ voit-il les points $(13, 3)$ et $(13, -1)$ dans le miroir? Justifier.

(Indication: faire un dessin et calculer l'image du point $(5, 7)$ par la symétrie σ_D .)

Corrigé :

a) Notons α le plus petit angle entre la droite D et l'axe Ox_1 . Alors

$$\sigma_D(x) = \tau_q \circ \rho_{-\alpha} \circ \sigma_1 \circ \rho_\alpha \circ \tau_{-q}(x).$$

On observe que $\alpha = \arctan(3/4)$ de sorte que $\sin(\alpha) = 3/5$ et $\cos(\alpha) = 4/5$ (attention au sens). Ainsi,

$$\sigma_D(x) = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} (x - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/25 & -24/25 \\ -24/25 & -7/25 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 108/25 \\ 144/25 \end{pmatrix}.$$

b) Pour qu'un point soit visible depuis le point $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ dans le miroir, il faut que le segment qui relie $\sigma_D(\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix})$ au point en question intersecte la droite D entre les points p et q .

On calcule $\sigma_D(\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Notons D' la droite passant par $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}$. L'équation de la droite D est donnée par $x_2 = -3/4 x_1 + 9/2$ et celle de D' par $x_2 = 4/14 x_1 - 10/14$. En résolvant ce système d'équations, on obtient comme intersection le point $\begin{pmatrix} 146/29 \\ 21/29 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 5 \\ 0,7 \end{pmatrix}$ qui appartient donc au segment reliant p à q . Ainsi, le point $\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}$ est visible dans le miroir depuis le point $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

La droite passant par $\begin{pmatrix} 13 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est la droite $y = -1$ de sorte que l'intersection avec la droite D se fait au point $\begin{pmatrix} 22/3 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui est à l'extérieur du segment reliant p à q . Ainsi, le point $\begin{pmatrix} 13 \\ -1 \end{pmatrix}$ n'est pas visible dans le miroir depuis le point $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. (15 pts)

Soit $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, la courbe définie par:

$$\beta(t) = (-2 + 9t + 6t^2 - 4t^3, 4 - 15t + 12t^2).$$

- a) Donner les points de contrôle de β .
- b) Dessiner la courbe (en utilisant l'algorithme de Casteljau) et dessiner les vecteurs tangents aux extrémités. Quel est le signe de la courbure orientée de β ?

Corrigé :

- a) On note $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$. Il s'agit d'exprimer $\beta_i(t)$ pour $i = 1, 2$ dans la base $\{B_0(t), B_1(t), B_2(t), B_3(t)\}$ des polynômes de Bernstein où

$$B_0(t) = (1-t)^3, \quad B_1(t) = 3(1-t)^2t, \quad B_2(t) = 3(1-t)t^2, \quad B_3(t) = t^3.$$

Pour $i = 1$, on a

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= -2 + 9t + 6t^2 - 4t^3 \\ &= b_{1,0}B_0(t) + b_{1,1}B_1(t) + b_{1,2}B_2(t) + b_{1,3}B_3(t) \\ &= b_{1,0}(1-3t+3t^2-t^3) + b_{1,1}(3t-6t^2+3t^3) + b_{1,2}(3t^2-3t^3) + b_{1,3}t^3 \end{aligned}$$

et, en identifiant les coefficients, on trouve le système suivant qu'il faut résoudre :

$$\begin{cases} b_{1,0} & & & = -2 \\ -3b_{1,0} & +3b_{1,1} & & = 9 \\ 3b_{1,0} & -6b_{1,1} & +3b_{1,2} & = 6 \\ -b_{1,0} & +3b_{1,1} & -3b_{1,2} & +b_{1,3} = -4 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} b_{1,0} & = -2 \\ b_{1,1} & = 1 \\ b_{1,2} & = 6 \\ b_{1,3} & = 9 \end{cases}.$$

Pour $i = 2$, on procède de même :

$$\begin{cases} b_{2,0} & & & = 4 \\ -3b_{2,0} & +3b_{2,1} & & = -15 \\ 3b_{2,0} & -6b_{2,1} & +3b_{2,2} & = 12 \\ -b_{2,0} & +3b_{2,1} & -3b_{2,2} & +b_{2,3} = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} b_{2,0} & = 4 \\ b_{2,1} & = -1 \\ b_{2,2} & = -2 \\ b_{2,3} & = 1 \end{cases}.$$

Ainsi, $\beta_i(t) = \sum_{k=0}^3 b_{i,k}B_k(t)$ pour $i = 1, 2$ et les points de contrôle sont alors donnés par (voir le Théorème 1.4.8) :

$$\begin{aligned} p^0 &= (b_{1,0}, b_{2,0}) = (-2, 4), & p^1 &= (b_{1,1}, b_{2,1}) = (1, -1), \\ p^2 &= (b_{1,2}, b_{2,2}) = (6, -2), & p^3 &= (b_{1,3}, b_{2,3}) = (9, 1). \end{aligned}$$

- b) Pour donner l'allure de la courbe, on applique l'algorithme de Casteljau (ici il n'y a pas de dessin, mais il faut faire comme dans les séries d'exercices). Pour dessiner les vecteurs tangents, on calcule (voir le Lemme 1.4.2) :

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(0) &= 3(p^1 - p^0)_{p^0} = 3((1, -1) - (-2, 4)) = (9, -15), \\ \dot{\beta}(1) &= 3(p^3 - p^2)_{p^3} = 3((9, 1) - (6, -2)) = (9, 9). \end{aligned}$$

Comme β est convexe et parcourue de gauche à droite, sa courbure orientée est positive.